# Две резинки

**Задача 1.** [ВсОШ 2021/22, 11 класс, задача 1] На горизонтальной поверхности в точке $O$ удерживают шайбу массой $m$, связанную с двумя невесомыми резинками, продетыми через зафиксированные на этой поверхности гладкие колечки $B$ и $C$. Другие концы резинок закреплены в точках $A$ и $D$, при этом $AB = CD = L$, $BC = 2L$, $BO = CO = L\sqrt{2}$ (рис. 1). Длины обеих резинок в свободном состоянии равны $L$, а коэффициенты жёсткости $k_{OBA} = k$, $k_{OCD} = 3k$, где $k$ — известная величина. Коэффициент трения шайбы о поверхность равен $\mu$, а резинки не касаются поверхности. Ускорение свободного падения $g$. Шайбу отпускают.

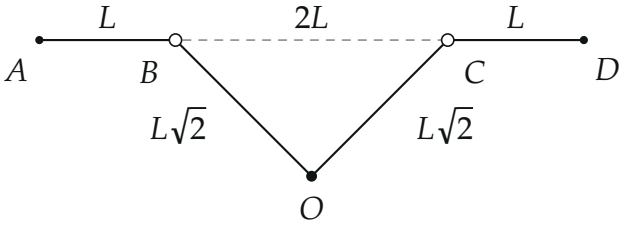
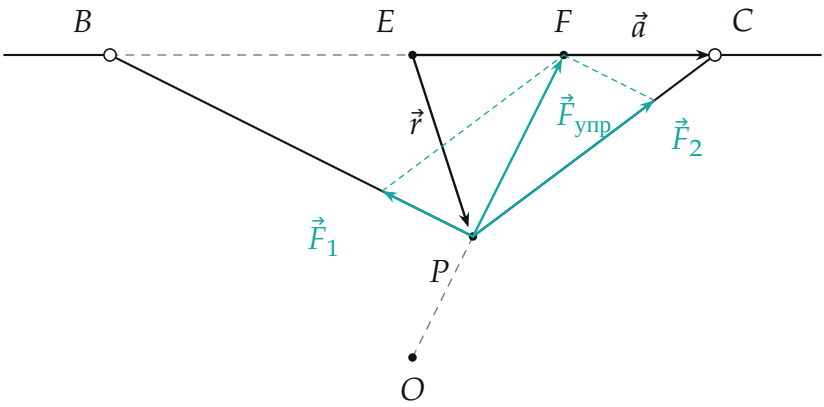



*Рис. 1.*

1. Найдите максимальную скорость $v_{max}$ шайбы в процессе дальнейшего движения.
2. Определите время $\tau$ от момента старта до момента, когда максимальная скорость достигается.

▲ **Решение. Что происходит.** Обе резинки тянут шайбу, и вместе они действуют как одна пружина: сила всегда направлена в одну точку $F$ и пропорциональна расстоянию до неё. К этой «пружине» добавляется сухое трение, постоянное по модулю. Такая задача решается так: трение не меняет частоты колебаний, оно только сдвигает центр, около которого шайба колеблется. Ключевые законы — закон Гука для каждой резинки, второй закон Ньютона и закон сохранения энергии с учётом работы трения.

**Обозначения.** $E$ — середина $BC$, $F$ — середина $EC$, $P$ — текущее положение шайбы; $\vec{r} = \overrightarrow{EP}$, $\vec{a} = \overrightarrow{EC}$, $|\vec{a}| = L$.




*Силы резинок на шайбу в точке $P$; масштаб стрелок: $\vec{F}_{упр}$ приходит ровно в $F$.*

**1. Результирующая сила упругости.** Колечки гладкие, поэтому сила каждой резинки направлена по её отрезку $BP$ или $CP$. Длина резинки $OBA$ при шайбе в $P$ равна $AB + BP = L + BP$, свободная длина $L$, значит, удлинение равно $BP$. Закон Гука для каждой резинки, в векторах ($\overrightarrow{PB} = -\vec{r} - \vec{a}$, $\overrightarrow{PC} = \vec{a} - \vec{r}$):

$$\vec{F}_1 = k\,\overrightarrow{PB} = -k(\vec{r} + \vec{a}), \qquad \vec{F}_2 = 3k\,\overrightarrow{PC} = -3k(\vec{r} - \vec{a}).$$

Складываем:

$$\vec{F}_{упр} = -4k\left(\vec{r} - \frac{\vec{a}}{2}\right) = 4k\,\overrightarrow{PF}.$$

Сила упругости всегда направлена к точке $F$ и равна $4k \cdot PF$: две резинки заменяются одной пружиной жёсткости $4k$ с равновесием в $F$. Смысл: каждая резинка — пружина нулевой длины, закреплённая в колечке; точка равновесия делит $BC$ в отношении, обратном жёсткостям (жёсткость $3k$ у $C$, значит, $F$ ближе к $C$).

**2. Траектория и условие старта.** Скорость в начале равна нулю, сила упругости направлена вдоль $PF$, то есть вдоль прямой $OF$, трение направлено против скорости, тоже вдоль неё. Поэтому шайба движется по прямой $OF$. Из прямоугольного треугольника $OEF$

($OE = \sqrt{BO^2 - BE^2} = L$, $EF = L/2$):

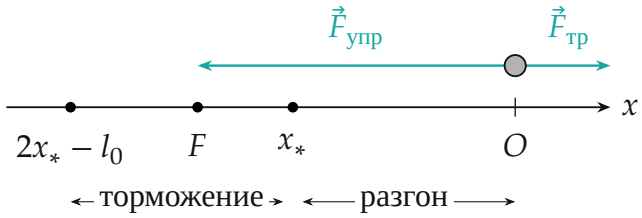
$$l_0 = OF = \frac{L\sqrt{5}}{2}, \qquad F_0 = 4k\,l_0 = 2\sqrt{5}\,kL.$$

Шайба тронется, только если $F_0 > \mu mg$, то есть $\mu mg < 2\sqrt{5}\,kL$; дальше считаем, что так и есть.

**3. Уравнение движения.** Введём ось $x$ вдоль $OF$ с началом в $F$ и направлением к $O$: тогда сила упругости не имеет других проекций и шайба стартует в $x = l_0$. Пока шайба движется к $F$ ($v_x < 0$), трение направлено против скорости, то есть вдоль $+x$. Второй закон Ньютона для шайбы в проекции на ось $x$ (вертикальные силы $N$ и $mg$ друг друга уравновешивают, $F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg$):

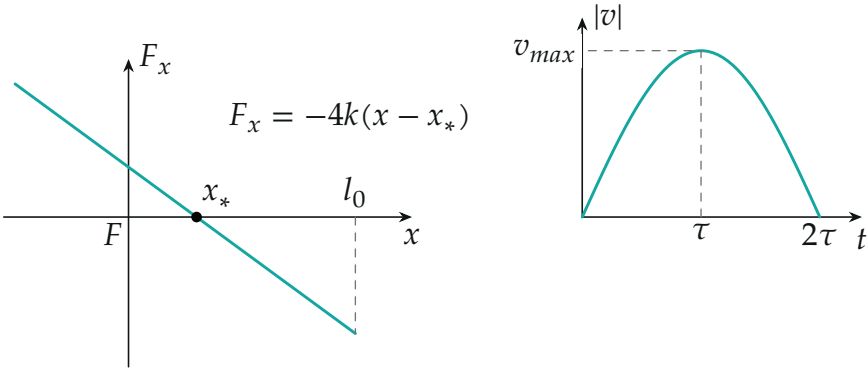
$$ma_x = -4kx + \mu mg = -4k(x - x_*), \qquad x_* = \frac{\mu mg}{4k}.$$

Это уравнение гармонических колебаний с центром в $x_*$, а не в $F$: трение сдвинуло положение равновесия на $x_*$ в сторону $O$. Качественная картина: при $x > x_*$ сила направлена к $F$ — шайба разгоняется; в точке $x_*$ ускорение равно нулю — скорость наибольшая; при $x < x_*$ сила направлена назад — шайба тормозит до остановки в точке $2x_* - l_0$.




*Стартовое положение: длины стрелок пропорциональны силам при $\mu mg = 4k \cdot 0{,}3\,l_0$.*

Замечание: это описание верно только до первой остановки; после неё трение меняет направление и центр колебаний переходит на другую сторону от $F$.




*Слева: результирующая сила на шайбу. Справа: модуль скорости — четверть синусоиды до максимума и ещё четверть до остановки.*

**4. Максимальная скорость.** Ускорение равно нулю в точке $x = x_*$, значит, скорость наибольшая при первом прохождении этой точки. Относительно центра $x_*$ шайба стартует с нулевой скоростью и амплитудой $l_1 = l_0 - x_*$, частота $\omega = \sqrt{4k/m} = 2\sqrt{k/m}$, поэтому

$$v_{max} = \omega l_1 = 2\sqrt{\frac{k}{m}}\left(\frac{L\sqrt{5}}{2} - \frac{\mu mg}{4k}\right) = L\sqrt{\frac{5k}{m}} - \frac{\mu g}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Второй способ — закон изменения энергии шайбы от старта до точки $x_*$: упругая энергия пружины $2kx^2$ убывает, трение отнимает $\mu mg\,(l_0 - x_*)$:

$$\frac{mv_{max}^2}{2} = 2k(l_0^2 - x_*^2) - 4kx_*(l_0 - x_*) = 2k(l_0 - x_*)^2 = 2k\,l_1^2,$$

откуда $v_{max} = 2l_1\sqrt{k/m}$ — тот же результат.

Обратите внимание: на следующих полупериодах энергия ещё меньше, поэтому первый максимум — наибольший; формула без трения $L\sqrt{5k/m}$ завышает ответ.

**5. Время достижения максимума.** Относительно центра $x_*$ координата меняется как $x - x_* = l_1\cos\omega t$ (старт в крайней точке), скорость максимальна при $\omega t = \pi/2$, то есть через четверть периода

$T = 2\pi/\omega = \pi\sqrt{m/k}$:

$$\tau = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Время не зависит ни от $\mu$, ни от $L$: период гармонических колебаний не зависит от амплитуды, а постоянная сила трения амплитуду уменьшает, но частоту не меняет.

**Проверка.** Размерность: $[k/m] = \text{с}^{-2}$, значит, $\sqrt{k/m}\cdot L$ и $\mu g\sqrt{m/k}$ имеют размерность скорости, $\sqrt{m/k}$ — времени. При $\mu \to 0$ получаем $v_{max} = L\sqrt{5k/m}$ — закон сохранения энергии без трения: $\frac{1}{2}mv^2 = 2k\,l_0^2$. На границе старта $\mu mg \to 2\sqrt{5}\,kL$ получаем $v_{max} \to 0$: шайба едва трогается. Энергетическая проверка: упругая энергия в $O$ равна $\frac{1}{2}k(\sqrt{2}L)^2 + \frac{1}{2}\,3k(\sqrt{2}L)^2 = 4kL^2$, в $F$ ($BF = \frac{3}{2}L$, $CF = \frac{1}{2}L$) — $\frac{3}{2}kL^2$; разность $\frac{5}{2}kL^2 = 2k\,l_0^2$, как и должно быть. Физический смысл: трение не меняет частоту, а только смещает центр колебаний к $O$ и уменьшает амплитуду, поэтому скорость падает, а время разгона остаётся прежним.

**Ответ.** 1) $v_{max} = L\sqrt{\dfrac{5k}{m}} - \dfrac{\mu g}{2}\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ (при $\mu mg < 2\sqrt{5}\,kL$; иначе шайба не сдвинется); 2) $\tau = \dfrac{\pi}{4}\sqrt{\dfrac{m}{k}}$.