Цилиндр и клапан

Задача 2. [ВсОШ 2021/22, 11 класс, задача 2] В торце теплоизолированного цилиндра с поршнем установлен клапан (рис. 2), перекрывающий небольшое отверстие, который открывается и начинает пропускать воздух снаружи в цилиндр при перепаде давлений $\Delta p = p_0/3$ (p_0 — атмосферное давление). Воздух из цилиндра наружу клапан не пропускает. В начальный момент времени поршень прижат к торцу цилиндра, воздуха внутри нет.

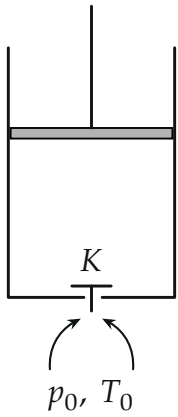


Рис. 2.

В первом случае цилиндр заполняют воздухом до объёма V_0, медленно перемещая поршень, после чего останавливают, а затем освобождают поршень.

1. Определите температуру воздуха в цилиндре T_1 в момент остановки поршня при объёме V_0, а также после освобождения поршня и прекращения его движения T_2.

Во втором случае поршень резко перемещают в положение, при котором объём под поршнем равен V_0, так что воздух не успевает проникнуть через клапан в цилиндр. В этом положении поршень фиксируют, дожидаются заполнения цилиндра воздухом, и так же, как в первом случае, освобождают поршень.

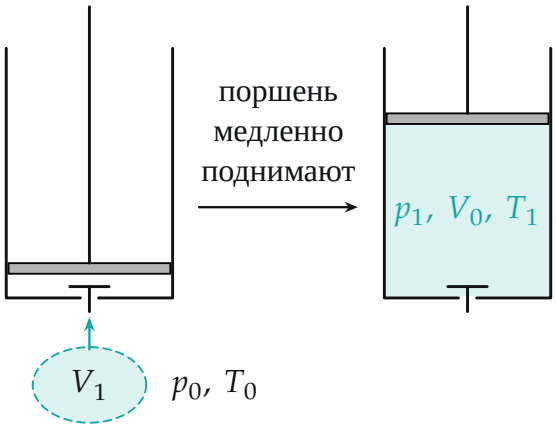
2. Определите и для этого случая температуру воздуха в цилиндре T_1' после остановки поршня и заполнения цилиндра воздухом, и

температуру T_2' после освобождения поршня и прекращения его движения. Считайте, что процесс заполнения цилиндра воздухом происходит квазистатически, клапан закрывается мгновенно после того, как разность давлений оказывается меньше пороговой.

Снаружи цилиндра воздух при атмосферном давлении и температуре T_0. Трением поршня о стенки, массой поршня, а также теплообменом воздуха с поршнем и стенками цилиндра можно пренебречь. Воздух можно считать двухатомным идеальным газом. После отпускания поршня клапан всё время остаётся закрытым.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Воздух входит в цилиндр через клапан, как через дроссель: его заталкивает атмосфера, и эта работа идёт в энергию воздуха внутри. Теплообмена нет, поэтому всё решает баланс энергии одной порции воздуха — той, что в итоге оказалась в цилиндре. Затем поршень отпускают: атмосфера постоянным давлением p_0 сжимает газ, и вся её работа остаётся в газе. Ключевой закон — первое начало термодинамики с $Q = 0$; состояния записываем через число молей ν и температуру, лишние объёмы уходят.

Обозначения. $p_1 = p_0 - \Delta p = \frac{2}{3}p_0$ — давление внутри цилиндра, при котором клапан закрывается; ν — число молей воздуха, оказавшегося внутри; внутренняя энергия двухатомного газа $U = \frac{5}{2}\nu RT = \frac{5}{2}pV$. Клапан пропускает воздух, пока снаружи давление выше внутреннего хотя бы на Δp, поэтому при заполнении давление внутри не поднимается выше p_1 и в конце равно p_1.



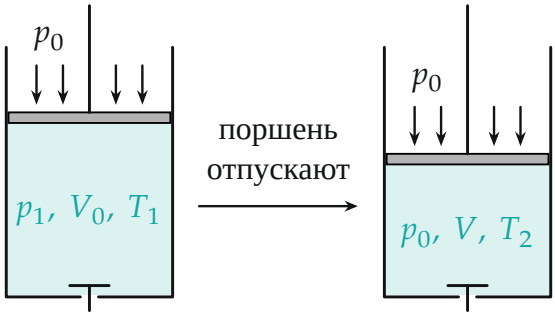
Первый случай. Порция воздуха, которая окажется в цилиндре, выделена пунктиром: снаружи она занимала объём V_1 при p_0, T_0.

1. Первый случай: заполнение до V_0. Возьмём систему — порцию из ν молей, которая к концу заполнения будет в цилиндре. Первое начало термодинамики для неё от начала до остановки поршня, $Q = 0$: изменение внутренней энергии равно работе атмосферы над порцией минус работе порции над поршнем. Атмосфера давлением p_0 вдавливает порцию, объём которой V_1 при p_0, T_0, поэтому её работа $p_0V_1 = \nu RT_0$. Внутри давление всё время равно p_1, и порция, раздвигая поршень до объёма V_0, совершает работу $p_1V_0 = \nu RT_1$. Получаем

$$\frac{5}{2}\nu R\,(T_1 - T_0) = \nu RT_0 - \nu RT_1 \quad\Longrightarrow\quad \frac{7}{2}\,T_1 = \frac{7}{2}\,T_0 \quad\Longrightarrow\quad T_1 = T_0.$$

Обратите внимание: работа атмосферы — p_0V_1, а не p_1V_1: порцию толкает наружный воздух; давление p_1 нужно только для работы против поршня.

Второй способ: для идеального газа энтальпия $H = U + pV = \frac{7}{2}\nu RT$ зависит только от температуры, а при протекании через клапан (дросселирование) она сохраняется, значит, температура не меняется: $T_1 = T_0$. Заодно $p_0V_1 = p_1V_0$, то есть $V_1 = \frac{2}{3}V_0$.



Освобождение поршня: газ (p_1 до, p_0 после) сжимается атмосферой; стрелки — давление p_0 на поршень.

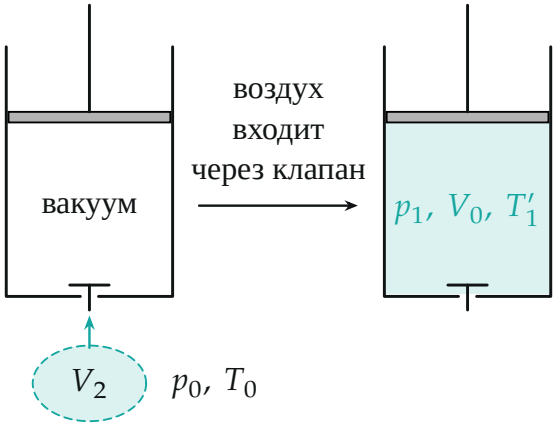
2. Поршень освобождают. Снаружи давление $p_0 > p_1$, поршень опускается; газ колеблется вместе с ним, но вязкость гасит колебания, и поршень останавливается. Остановиться поршень может только при

давлении газа p_0: на невесомый поршень действуют лишь газ и атмосфера. Система — газ в цилиндре (ν молей, клапан закрыт); до: p_1, V_0, T_a ($T_a = T_1$ в первом случае, T_1' — во втором); после: p_0, V, T_b. Теплообмена нет. Первое начало: изменение энергии газа равно работе поршня над ним.

У невесомого поршня результирующая сила в любой момент равна нулю (иначе ускорение было бы бесконечным), значит, сила поршня на газ всё время равна $p_0 S$, и работа над газом равна $p_0(V_0 - V)$, хотя процесс неравновесный. Обратите внимание: считать её как $\int p\,dV$ с давлением газа нельзя. С учётом $p_0 V = \nu R T_b$ и $p_0 V_0 = \frac{p_0}{p_1} p_1 V_0 = \frac{3}{2}\nu R T_a$:

$$\frac{5}{2}\nu R\,(T_b - T_a) = p_0 V_0 - p_0 V = \frac{3}{2}\nu R T_a - \nu R T_b$$
$$\Longrightarrow \quad \frac{7}{2} T_b = 4\,T_a \quad \Longrightarrow \quad T_b = \frac{8}{7}\,T_a.$$

Для первого случая $T_2 = \frac{8}{7}T_1 = \frac{8}{7}T_0$. Объём газа после остановки: $V = \nu R T_b / p_0 = \frac{p_1 T_b}{p_0 T_a} V_0 = \frac{16}{21} V_0$, поршень опустился на $\frac{5}{21} V_0$.



Второй случай. Поршень резко подняли: внутри вакуум, воздух входит и до закрытия клапана заполняет цилиндр до p_1.

3. Второй случай: заполнение пустого цилиндра. Поршень зафиксирован, поэтому порция воздуха, входя в вакуум, никакой работы над поршнем не совершает; работу над ней совершает только атмосфера.

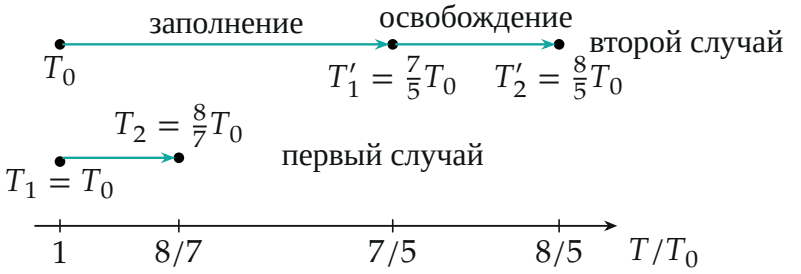
Клапан открыт, пока давление внутри меньше p_1 (вначале $\Delta p = p_0 > p_0/3$), и закрывается при p_1. Первое начало термодинамики для порции из ν молей, $Q = 0$:

$$\tfrac{5}{2}\nu R\,(T_1' - T_0) = p_0 V_2 = \nu R T_0 \quad \Longrightarrow \quad T_1' = \tfrac{7}{5}\,T_0,$$

где V_2 — объём порции снаружи. Это известный результат наполнения вакуума: $T_1' = \gamma T_0$, $\gamma = \frac{7}{5}$, и от p_1 он не зависит. Число молей и объём порции: $\nu = \dfrac{p_1 V_0}{R T_1'}$, $V_2 = \frac{10}{21} V_0$. Горячее, чем в первом случае: вся работа атмосферы пошла в нагрев, а не на подъём поршня.

После освобождения поршня всё происходит, как в пункте 2 (формула для T_b/T_a зависит только от p_0/p_1, а оно прежнее):

$$T_2' = \tfrac{8}{7}\,T_1' = \tfrac{8}{7}\cdot\tfrac{7}{5}\,T_0 = \tfrac{8}{5}\,T_0.$$



Температуры в обоих случаях на одной шкале.

Проверка. Размерности: ответы — безразмерные множители при T_0. Предел: при $\Delta p \to 0$ получаем $p_1 \to p_0$ и в общей формуле $T_b/T_a = (5 + 2p_0/p_1)/7 \to 1$ — поршень не сдвигается, газ не греется, как и должно быть. Для $p_0/p_1 = \frac{3}{2}$ формула даёт $\frac{8}{7}$. Расчёт с точными дробями ($V_1 = \frac{2}{3}V_0$, $V_2 = \frac{10}{21}V_0$, смещение поршня $\frac{5}{21}V_0$) подтверждает все энергетические балансы. Смысл: клапан температуру не меняет, нагрев даёт сжатие атмосферой; в пустой цилиндр воздух попадает уже нагретым в γ раз.

Ответ. 1) $T_1 = T_0$, $T_2 = \dfrac{8}{7}\,T_0$; 2) $T_1' = \dfrac{7}{5}\,T_0$, $T_2' = \dfrac{8}{5}\,T_0$.