Колебания заряда

Задача 3. [ВсОШ 2021/22, 11 класс, задача 3] Длинная диэлектрическая тонкостенная труба радиуса R, равномерно заряженная с поверхностной плотностью заряда σ, закреплена горизонтально в поле тяжести g. К верхней точке трубы одним концом прикреплена невесомая, нерастяжимая, непроводящая нить длины R, на другом конце нити маленький заряженный шарик массы m. Знаки зарядов шарика и трубы совпадают. Шарик сначала удерживают так, что нить не натянута, а затем отпускают. Через некоторое время движение прекращается, причём нить принимает форму прямого отрезка, перпендикулярного оси цилиндра.

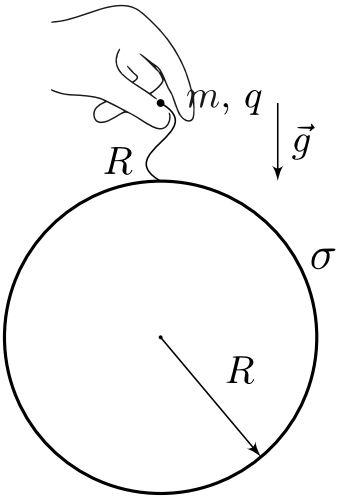
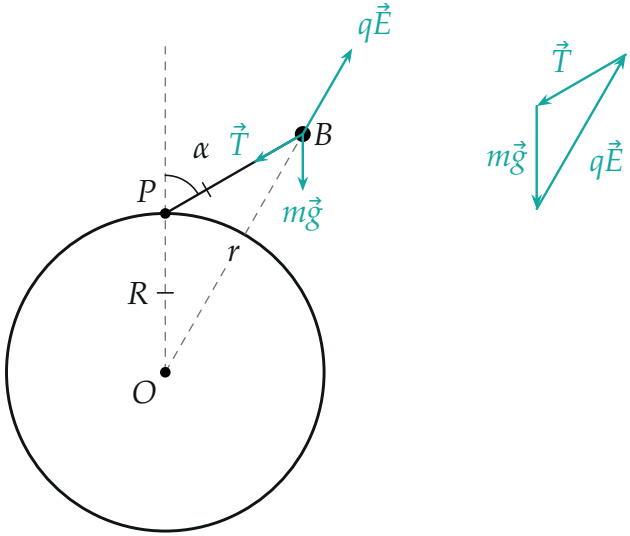


Рис. 3.

1. Какие значения может принимать величина заряда шарика q?
2. Определите величину силы натяжения нити при значениях заряда, полученных в первом пункте, и постройте график этой зависимости $T(q)$ с указанием характерных точек и участков.
3. Пусть модуль заряда шарика $|q|$, причём $|q| > 2\varepsilon_0 mg/|\sigma|$. Определите период малых гармонических колебаний шарика, происходящих в плоскости рисунка.

▲ **Решение. Что происходит.** Шарик того же знака, что и труба, отталкивается от её оси; поле слабеет с расстоянием. При большом заряде шарик стоит над трубой на вертикальной натянутой нити, при меньшем нить наклоняется, при слишком малом натянутого положения нет. Шарик остановился, значит, равновесие *устойчиво*: от неустойчивого его уведёт любое малое отклонение. Три вопроса: где равновесия, какие из них устойчивы, какова частота малых колебаний. Для наклонной нити три силы образуют треугольник, подобный треугольнику «ось — подвес — шарик»; устойчивость и частоту проще получить из потенциальной энергии.

Обозначения. O — ось трубы (центр сечения), P — точка подвеса ($OP = PB = R$), B — шарик, $r = OB$, α — угол нити PB с вертикалью вверх. Так как знаки совпадают, $q\sigma > 0$; введём безразмерный заряд $\kappa = \dfrac{q\sigma}{\varepsilon_0 mg} = \dfrac{|q||\sigma|}{\varepsilon_0 mg}$.



Слева: геометрия и силы на шарик при $\alpha = 60°$ (чёрточки отмечают равные отрезки $OP = PB = R$). Справа: те же три силы, сложенные в треугольник, подобный $\triangle OPB$.

1. Поле трубы. Теорема Гаусса для соосного цилиндра радиуса $r > R$ и длины l: $E \cdot 2\pi rl = \sigma \cdot 2\pi Rl/\varepsilon_0$, откуда

$$E = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0 r},$$

вектор $\vec{E}$ направлен вдоль радиуса от оси. Треугольник OPB равнобедренный с углом $180^\circ - \alpha$ при вершине P, поэтому $r = 2R\cos\dfrac{\alpha}{2}$. Нить не может уйти ниже горизонтали ($\alpha \le 90^\circ$): она прошла бы сквозь трубу.

2. Равновесие с наклонной нитью, $0 < \alpha \le 90^\circ$**.** На шарик действуют $m\vec{g}$, $\vec{T}$ (вдоль BP) и $q\vec{E}$ (вдоль OB). Условие $\vec{T} + m\vec{g} + q\vec{E} = 0$: три вектора образуют замкнутый треугольник, стороны которого параллельны BP, PO, OB, то есть подобный $\triangle OPB$ (на рисунке справа). Из подобия, не раскладывая силы по осям:

$$\frac{T}{R} = \frac{mg}{R} = \frac{qE}{r} \quad\Longrightarrow\quad T = mg, \qquad qE = mg\,\frac{r}{R}.$$

Подставим E: $\dfrac{q\sigma R}{\varepsilon_0 r} = \dfrac{mg\,r}{R}$, то есть $q\sigma = \varepsilon_0 mg\,\dfrac{r^2}{R^2}$ и

$$\kappa = 4\cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

При α от 0 до 90° величина $\cos^2\frac{\alpha}{2}$ убывает от 1 до $\frac{1}{2}$, поэтому наклонная нить возможна при $2 \le \kappa < 4$; с ростом заряда нить поднимается, при $\kappa = 2$ она горизонтальна.

3. Вертикальная нить, $\alpha = 0$**.** Тогда $r = 2R$, $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$; нить тянет шарик вниз к P. Второй закон Ньютона на вертикаль: $qE = mg + T$, откуда

$$T = \frac{q\sigma}{2\varepsilon_0} - mg = mg\Big(\frac{\kappa}{2} - 1\Big) \ge 0 \quad \text{при} \quad \kappa \ge 2.$$

4. Устойчивость. Нить натянута, шарик движется по дуге радиуса R с центром в P; единственная координата — угол α (знак различает стороны от вертикали). Потенциальная энергия: гравитационная $mg(R+$

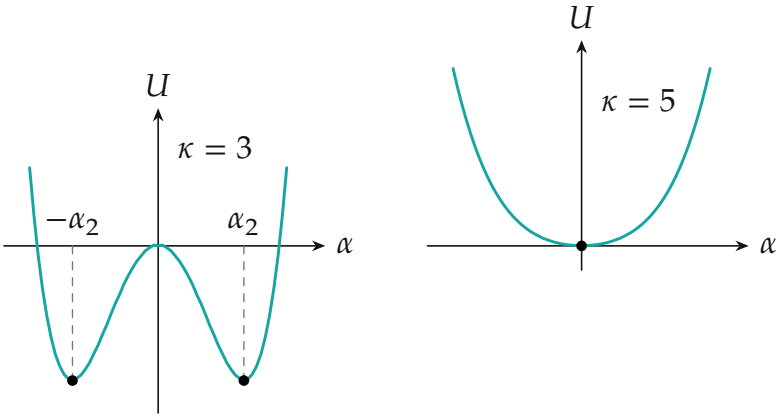
$R\cos\alpha$) плюс электрическая $q\varphi$, где потенциал $\varphi = -\dfrac{\sigma R}{\varepsilon_0}\ln\dfrac{r}{R}$ (потому что $E = -d\varphi/dr$). С точностью до постоянной

$$U(\alpha) = mgR\Big[\cos\alpha - \kappa\ln\cos\frac{\alpha}{2}\Big], \qquad \frac{U'}{mgR} = \tan\frac{\alpha}{2}\Big(\frac{\kappa}{2} - 2\cos^2\frac{\alpha}{2}\Big),$$

где использовано $\sin\alpha = 2\tan\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}$. Нули производной — $\alpha = 0$ или $\kappa = 4\cos^2\frac{\alpha}{2}$: те же положения, что в пунктах 2–3. Устойчивое равновесие — минимум U, то есть $U'' > 0$:

$$\frac{U''(0)}{mgR} = \frac{\kappa}{4} - 1 > 0 \;\Leftrightarrow\; \kappa > 4,$$
$$\frac{U''(\alpha_2)}{mgR} = \tan\frac{\alpha_2}{2}\,\sin\alpha_2 = 1 - \cos\alpha_2 > 0.$$

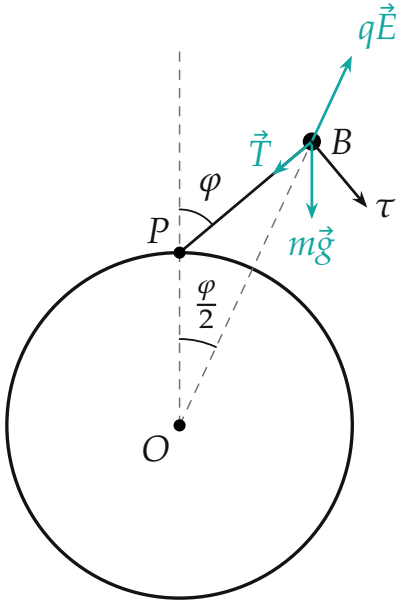
Наклонное положение α_2 (при $2 \le \kappa < 4$) устойчиво всегда, вертикальное — только при $\kappa > 4$ (на рисунке: при $\kappa = 3$ два минимума и максимум при $\alpha = 0$, при $\kappa = 5$ один минимум).



Потенциальная энергия $U(\alpha)$ шарика на нити: $\kappa = 3$ — равновесие при $\alpha = 0$ неустойчиво, устойчивы $\pm\alpha_2$ ($\alpha_2 = 60°$); $\kappa = 5$ — устойчиво $\alpha = 0$.

Второй способ для $\alpha = 0$ — через силы. Отклоним нить на малый угол φ (рисунок ниже). Вектор $\vec{E}$ направлен вдоль OB, а угол OPB рав-

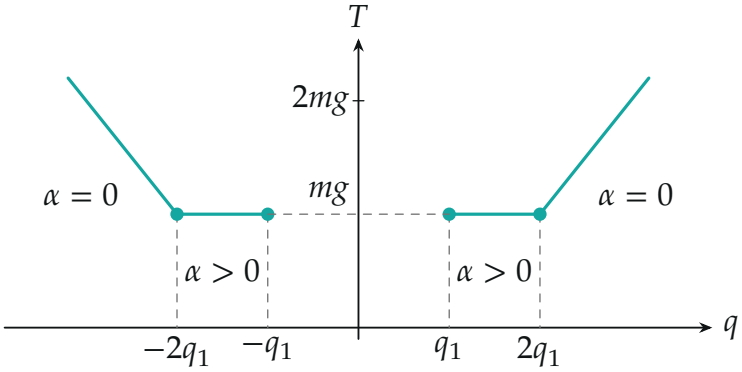
нобедренного треугольника даёт угол $\varphi/2$ между OB и вертикалью. Проекции сил на направление τ, перпендикулярное нити (в сторону увеличения φ): $F_\tau = mg\sin\varphi - qE\sin\dfrac{\varphi}{2} \approx \left(mg - \dfrac{q\sigma}{4\varepsilon_0}\right)\varphi$, где $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ при малых φ. Сила возвращает, если коэффициент отрицателен, то есть при $q\sigma > 4\varepsilon_0 mg$ — то же условие $\kappa > 4$.



Малое отклонение нити от вертикали (угол φ нарисован увеличенным).

Пункт 1. Устойчивое равновесие с натянутой нитью есть при $2 \le \kappa < 4$ (наклонная нить) и при $\kappa > 4$ (вертикальная), а при $\kappa = 4$ оба положения совпадают. Значит, $\kappa \ge 2$, то есть $|q| \ge q_1 = \dfrac{2\varepsilon_0 mg}{|\sigma|}$; при меньших $|q|$ натянутого равновесия нет.

Пункт 2. При $q_1 \le |q| < 2q_1$: $T = mg$. При $|q| \ge 2q_1 = \dfrac{4\varepsilon_0 mg}{|\sigma|}$: $T = \dfrac{q\sigma}{2\varepsilon_0} - mg = mg\left(\dfrac{|q|}{q_1} - 1\right)$. График: отрезок на высоте mg от q_1 до $2q_1$, затем луч с наклоном mg/q_1; при $\sigma < 0$ график зеркален (показаны оба знака q).



$T(q)$: при $|q| < q_1$ натянутого равновесия нет; в точке $2q_1$ график непрерывен, $T = mg$.

Пункт 3. Второй закон Ньютона для движения по дуге (проекция на касательную; смещение вдоль дуги $R\,d\alpha$, сила $-\dfrac{1}{R}\dfrac{dU}{d\alpha}$): $mR^2\ddot{\alpha} = -U'(\alpha)$. Вблизи равновесия α_e в линейном приближении $mR^2\ddot{\delta} = -U''(\alpha_e)\,\delta$, откуда $\omega^2 = \dfrac{U''(\alpha_e)}{mR^2}$. Вертикальное положение ($\kappa > 4$): $\omega_1^2 = \dfrac{g}{R}\left(\dfrac{\kappa}{4} - 1\right) = \dfrac{q\sigma}{4\varepsilon_0 mR} - \dfrac{g}{R}$. Наклонное ($2 < \kappa < 4$): $\cos\alpha_2 = 2\cos^2\dfrac{\alpha_2}{2} - 1 = \dfrac{\kappa}{2} - 1$, поэтому $\omega_2^2 = \dfrac{g}{R}(1 - \cos\alpha_2) = \dfrac{g}{R}\left(2 - \dfrac{\kappa}{2}\right) = \dfrac{2g}{R} - \dfrac{q\sigma}{2\varepsilon_0 mR}$. Периоды $2\pi/\omega$ даны в ответе.

Обратите внимание: при $\kappa = 4$ ($|q| = 4\varepsilon_0 mg/|\sigma|$) обе частоты обращаются в нуль, возвращающая сила пропорциональна φ^3 (в разложении $U \approx mgR\,\alpha^4/16$) и колебания негармонические — периода из формул нет.

Проверка. Размерности: $\varepsilon_0 mg/|\sigma|$ — заряд, $\varepsilon_0 mR/(q\sigma)$ — время^2. Непрерывность: при $\kappa = 4$ обе формулы для T дают mg; при $\kappa \to 4$ с обеих сторон $\omega \to 0$. Численно (python) для $\kappa = 3$: минимум U при 60°, сумма сил в нём равна нулю, период из U'' совпадает с формулой T_2 до 10^{-7}.

Ответ. 1) $|q| \geq \dfrac{2\varepsilon_0 mg}{|\sigma|}$; 2) $T = mg$ при $\dfrac{2\varepsilon_0 mg}{|\sigma|} \leq |q| < \dfrac{4\varepsilon_0 mg}{|\sigma|}$ (нить

наклонена), $T = \dfrac{|q\sigma|}{2\varepsilon_0} - mg$ при $|q| \geq \dfrac{4\varepsilon_0 mg}{|\sigma|}$ (нить вертикальна), график — на рисунке; 3) $T_1 = 2\pi\sqrt{\dfrac{4\varepsilon_0 mR}{q\sigma - 4\varepsilon_0 mg}}$ при $|q| > \dfrac{4\varepsilon_0 mg}{|\sigma|}$; $T_2 = 2\pi\sqrt{\dfrac{2\varepsilon_0 mR}{4\varepsilon_0 mg - q\sigma}}$ при $\dfrac{2\varepsilon_0 mg}{|\sigma|} < |q| < \dfrac{4\varepsilon_0 mg}{|\sigma|}$.