Соленоид и виток

Задача 4. [ВсОШ 2021/22, 11 класс, задача 4] Полубесконечный соленоид с радиусом витков r и плотностью намотки n (число витков на единицу длины) расположен соосно круговому сверхпроводящему витку радиуса R так, что его основание находится в плоскости витка. Известно, что $r \ll R$. Изначально ток в витке отсутствовал. Индуктивность витка равна L. Силу тока в соленоиде медленно увеличивают от нуля до I и далее поддерживают постоянной. Провода, подводящие ток к соленоиду, расположены таким образом, что их магнитным полем и их взаимодействием с другими элементами можно пренебречь. Направим ось x так, как показано на рисунке.

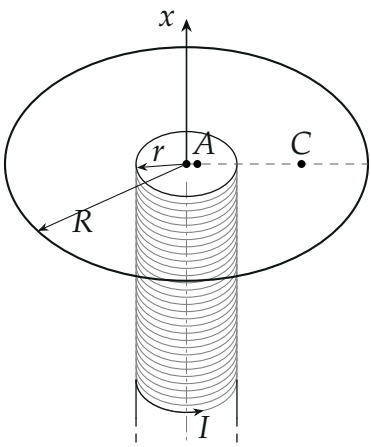


Рис. 4.

1. Точки A и C расположены в плоскости витка на расстояниях $r/3$ и $3r$ соответственно от оси симметрии системы. Найдите проекции индукции B_{Ax} и B_{Cx} магнитного поля, создаваемого соленоидом в точках A и C соответственно.
2. Найдите силу тока $I_в$ в витке. Укажите, как он направлен.
3. Найдите величину и направление силы магнитного взаимодействия, действующей на соленоид со стороны витка.

Примечание: для бесконечного соленоида поле внутри соленоида однородное, вектор магнитной индукции направлен параллельно оси и его величина определяется формулой $B_0 = \mu_0 n I$. Снаружи бесконечного соленоида $\vec{B} = 0$.

▲ **Решение. Что происходит.** Задача идёт цепочкой. Сначала находим поле соленоида в плоскости его основания: у полубесконечного соленоида оно устроено просто, если достроить его зеркальным двойником до бесконечного. Затем поле даёт поток через виток, а сверхпроводящий виток поток сохраняет: возникает ток, который гасит поток соленоида. Наконец сила: проще посчитать силу соленоида на виток (поле соленоида около витка находится из теоремы Гаусса), а по третьему закону Ньютона перенести её на соленоид.

Обозначения. ρ — расстояние до оси; основание соленоида лежит в плоскости $x = 0$, соленоид занимает $x \le 0$ (как на рисунке); $B_0 = \mu_0 n I$; ток соленоида идёт против часовой стрелки, если смотреть с $+x$, поэтому поле внутри направлено вдоль $+x$. Положительным считаем ток в витке в том же направлении, что у соленоида.

1. Поле в плоскости основания (пункт 1). Добавим к соленоиду его зеркальное отражение в плоскости основания с тем же направлением тока: вместе они — бесконечный соленоид с полем B_0 внутри и 0 снаружи. Отражение в плоскости не меняет направление обхода витков, а поле (аксиальный вектор) при зеркальном отражении преобразуется так: составляющая, перпендикулярная плоскости зеркала, остаётся прежней, а параллельная плоскости меняет знак. Значит, в точке плоскости основания поле добавленного соленоида $\vec{B}'$ связано с полем исходного $\vec{B}$ так: $B'_x = B_x$, $B'_\rho = -B_\rho$.

Сложим поля в плоскости основания:

$$B_x + B'_x = 2B_x = B_{0x}^{\text{беск.}}, \qquad B_\rho + B'_\rho = 0.$$

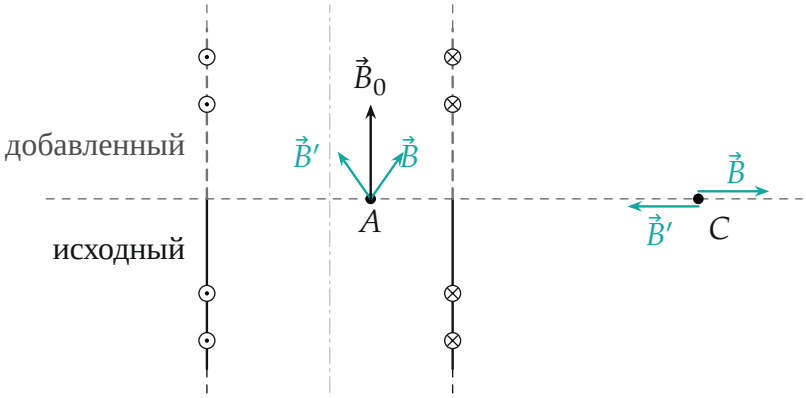
У бесконечного соленоида на расстоянии $\rho < r$ от оси $B_{0x} = \mu_0 n I$, а при $\rho > r$ — ноль. Значит, в плоскости основания

$$B_x(\rho) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 n I}{2}, & \rho < r, \\ 0, & \rho > r. \end{cases}$$

Точка A ($\rho = r/3 < r$) и точка C ($\rho = 3r > r$):

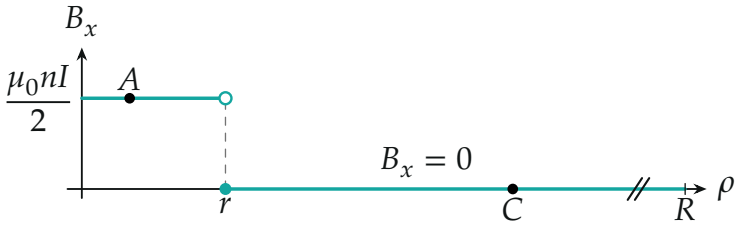
$$B_{Ax} = \frac{\mu_0 nI}{2}, \qquad B_{Cx} = 0.$$

Обратите внимание: в C поле равно нулю только по проекции на x — вектор $\vec{B}$ там не нуль, он лежит в плоскости основания ($B_\rho \neq 0$, пункт 3).



Осевое сечение: исходный соленоид ($x < 0$) и добавленный ($x > 0$); $\vec{B}_0 = \vec{B} + \vec{B}'$. Значки на стенках — токи (к нам и от нас).

Второй способ: проекция поля на ось равна $B_x = \mu_0 nI\,\Omega/(4\pi)$, где Ω — телесный угол, под которым из точки видна боковая поверхность соленоида (со знаком). Из точки основания внутри соленоида боковая поверхность видна под углом 2π — половина полного, отсюда $\mu_0 nI/2$; снаружи — под нулевым. Тот же результат; на оси он совпадает и с известным полем конца соленоида.



Проекция B_x в плоскости основания: скачок на $\rho = r$; точка $R \gg r$ показана сжатой (разрыв оси).

2. Ток в витке (пункт 2). Поток поля соленоида через виток: при $\rho < r$ поле $\mu_0 nI/2$, при $r < \rho < R$ поле в проекции на ось нулевое, поэтому

$$\Phi_\text{с} = \frac{\mu_0 nI}{2}\,\pi r^2 = \frac{\pi\mu_0 nIr^2}{2}.$$

Виток сверхпроводящий: сопротивления нет, значит, изменение полного потока через виток сразу вызвало бы бесконечный ток, поэтому полный поток остаётся постоянным — таким, каким был вначале, то есть нулём. Полный поток — поток соленоида плюс собственный поток витка $LI_\text{в}$ (при положительном направлении, выбранном выше):

$$\Phi_\text{с} + LI_\text{в} = 0 \quad\Longrightarrow\quad I_\text{в} = -\frac{\pi\mu_0 nIr^2}{2L}.$$

Знак минус: ток в витке направлен против тока соленоида (по часовой стрелке, если смотреть с $+x$). Смысл: виток противодействует изменению потока — правило Ленца.

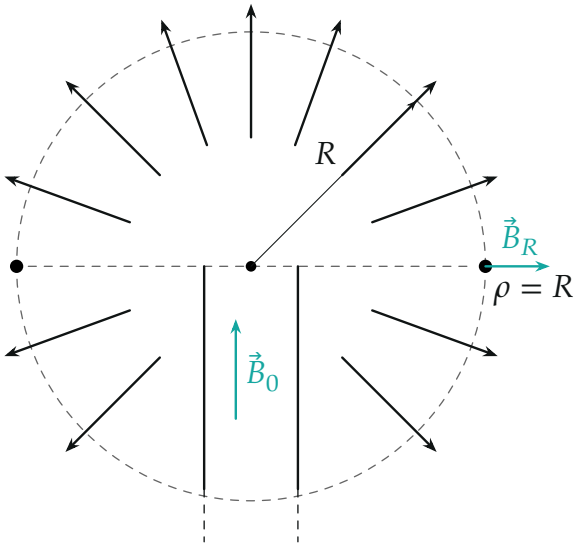
3. Сила (пункт 3). Найдём силу соленоида на виток, потом применим третий закон Ньютона. Для этого нужна составляющая B_ρ поля соленоида на витке: сила Ампера на элемент витка с током вдоль окружности и B_ρ направлена вдоль оси, а B_x на витке равно нулю (пункт 1, $\rho = R > r$).

Теорема Гаусса для магнитного поля (поток через замкнутую поверхность равен нулю), поверхность — шар радиуса R с центром в центре основания. Соленоид входит в шар через маленький круг площади $S = \pi r^2$, и поток внутрь равен $B_0 S$; значит, через остальную поверхность шара наружу выходит такой же поток $\Phi_0 = B_0 S$. Так как $R \gg r$, торец соленоида издали выглядит точечным источником потока, и поле на шаре радиально и одинаково по модулю:

$$B_R = \frac{\Phi_0}{4\pi R^2} = \frac{\mu_0 nIr^2}{4R^2}.$$

В точках плоскости основания на расстоянии R это и есть B_ρ, направ-

ленная от оси (вектор $\vec{B}_R$ на рисунке).



Шар радиуса R с центром в центре основания: поток $B_0 S$ входит по соленоиду, выходит радиально по всему шару.

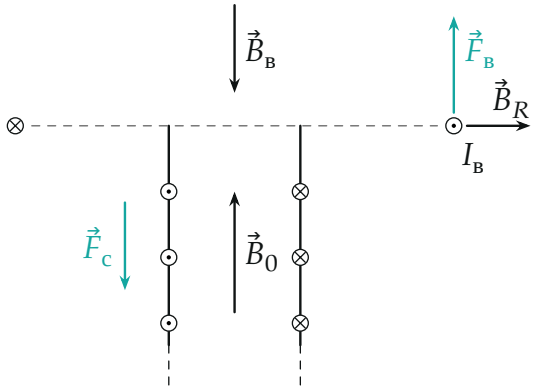
Сила на виток: сила Ампера на элемент dl с током $I_в$ в поле B_R имеет модуль $|I_в| B_R\, dl$ и направлена вдоль оси; на всех элементах одинаково, поэтому

$$F_в = |I_в|\, B_R \cdot 2\pi R = \frac{\pi \mu_0 n I r^2}{2L} \cdot \frac{\mu_0 n I r^2}{4R^2} \cdot 2\pi R = \frac{1}{RL}\left(\frac{\pi \mu_0 n I r^2}{2}\right)^2.$$

Направление: у правой точки витка ток идёт к нам (по часовой стрелке с $+x$), $\vec{B}_R$ — вправо; векторное произведение даёт силу вверх, вдоль $+x$ (рисунок). Виток отталкивается вверх, а по третьему закону Ньютона сила на соленоид равна по модулю и противоположна по направлению:

$$F_x = -\frac{1}{RL}\left(\frac{\pi \mu_0 n I r^2}{2}\right)^2,$$

соленоид и виток отталкиваются.



Токи и силы: $\vec{F}_в$ — сила на виток, $\vec{F}_с = -\vec{F}_в$ — на соленоид; поле витка $\vec{B}_в$ направлено против $\vec{B}_0$.

Обратите внимание: силу на соленоид считать напрямую неудобно (надо знать поле витка вдоль всего соленоида), а поле соленоида на витке мы уже нашли — поэтому идём через виток.

Второй способ — через взаимную индуктивность. Сила на соленоид с постоянным током I в поле витка равна $F_x = I\,I_в\,dM/dx$, где $M = \Phi_с/I = \mu_0 nS/2$ — взаимная индуктивность. Сдвиг соленоида на dx вверх добавляет $n\,dx$ витков в поле центра витка $\mu_0 I_в/(2R)$, то есть $dM = \mu_0 nS\,dx/(2R)$. Подставляя $I_в = -MI/L$, получаем $F_x = -\dfrac{I^2}{L}M\dfrac{dM}{dx} = -\dfrac{1}{RL}\Big(\dfrac{\mu_0 nSI}{2}\Big)^2$ — тот же результат.

Проверка. Размерности: $\mu_0 nI$ — индукция, Φ — вебер, $I_в = \Phi/L$ — ампер, $F = \Phi^2/(RL) =$ Дж/м $=$ Н. Предел: сила пропорциональна r^4 и пропадает при $r \to 0$. Численно (python, суммирование полей колец тока, длина соленоида $300r$): $B_x(r/3) = 0{,}49999\,\mu_0 nI$ (ожидалось 0,5); $B_x(3r) \approx 3\cdot 10^{-6}\mu_0 nI$; $B_\rho(R)$ при $R = 10r$ равно $0{,}00251\,\mu_0 nI$ против $r^2/(4R^2) = 0{,}0025$ по формуле.

Ответ. 1) $B_{Ax} = \dfrac{\mu_0 nI}{2}$, $B_{Cx} = 0$; 2) $I_в = -\dfrac{\pi\mu_0 nIr^2}{2L}$ — ток в витке направлен против тока в соленоиде (по часовой стрелке, если смотреть с $+x$); 3) $F_x = -\dfrac{1}{RL}\Big(\dfrac{\pi\mu_0 nIr^2}{2}\Big)^2$: соленоид отталкивается от витка, сила направлена против оси x, по модулю $\dfrac{1}{RL}\Big(\dfrac{\pi\mu_0 nIr^2}{2}\Big)^2$.