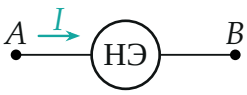
Нелинейный элемент и конденсатор

Задача 5. [ВсОШ 2021/22, 11 класс, задача 5] Рассмотрим нелинейный элемент (рис. 5) такой, что при протекании через него тока в направлении от A к B зависимость напряжения U_{AB} от силы тока I описывается формулой

$$U_{AB} = U_1 + \frac{A}{I},$$

где $U_1 > 0$ и $A > 0$.

Если сила тока, текущего через элемент, равна нулю, то напряжение на нём может принимать любые значения. В противоположном направлении электрический ток протекать не может. На рисунке 6 качественно представлена ВАХ нелинейного элемента. В данной задаче рассматриваются две электрические цепи, содержащие данный нелинейный элемент.



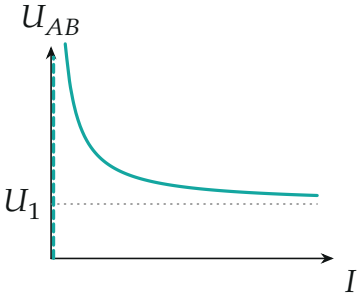


Рис. 5 (слева): нелинейный элемент. Рис. 6 (справа): его ВАХ.

Часть 1. Электрическая цепь, схема которой приведена на рисунке 7, состоит из источника постоянного напряжения с пренебрежимо малым внутренним сопротивлением, резистора с сопротивлением R и нелинейного элемента с известными параметрами U_1 и A.

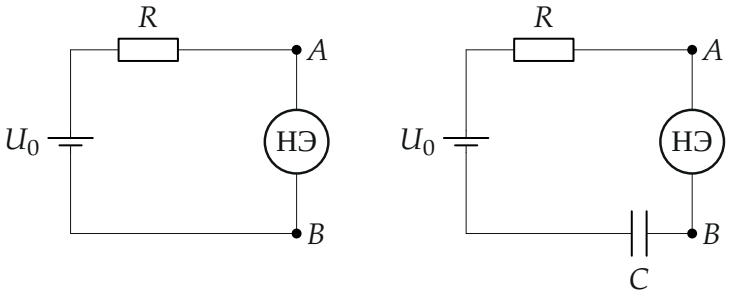


Рис. 7 (слева) и рис. 8 (справа): две цепи с нелинейным элементом.

1. При каких значениях напряжения источника U_0 в цепи может протекать постоянный электрический ток?

Часть 2. Электрическая цепь, схема которой приведена на рисунке 8, состоит из источника постоянного напряжения U_0 с пренебрежимо малым внутренним сопротивлением, резистора с сопротивлением R, конденсатора ёмкостью $C = 10$ мФ и нелинейного элемента, для которого $U_1 = 2$ В. Изначально конденсатор не заряжен. Затем в результате кратковременного внешнего воздействия в цепи начинает протекать электрический ток. На рисунке 9 (и на отдельном листе в увеличенном масштабе) представлен график зависимости напряжения на конденсаторе U_C от силы тока I в цепи. Точка 1 соответствует моменту времени начала протекания тока, точка 2 — достижению максимального напряжения на конденсаторе, а пунктирная линия 23 — прекращению протекания в цепи электрического тока.

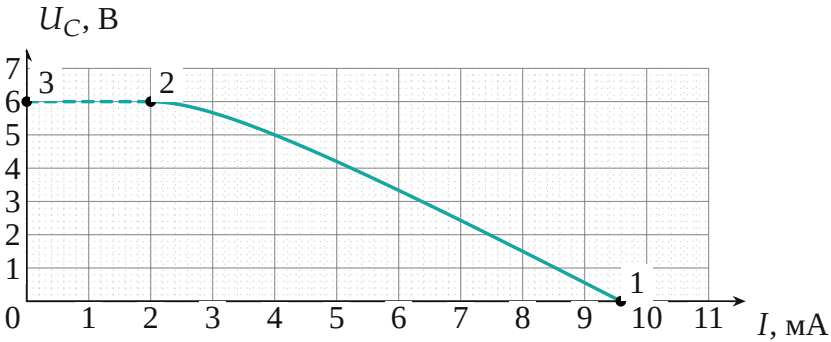


Рис. 9.

2. Найдите U_0, R и A.
3. Найдите количество теплоты Q_R, выделившееся на резисторе за все время протекания тока в цепи.
4. Определите время τ, в течение которого в цепи протекал ток.

▲ **Решение. Что происходит.** Нелинейный элемент (НЭ) похож на «диод с напряжением, растущим при уменьшении тока»: падение на нём $U_1 + A/I$. Для цепи без конденсатора это даёт квадратное уравнение на ток — вопрос о том, когда у него есть корень. С конденсатором картина движется: заряд растёт, напряжение на нём растёт, и ток на каждом шаге определяется тем же уравнением — ток убывает вдоль кривой на рисунке 9. Заканчивается всё, когда корень исчезает (точка 2): ток обрывается. Теплоту и время находим из малого шага: за dt конденсатор получает заряд $dq = I\,dt = C\,dU_C$, и всё, что выделяется, выражается через dU_C.

Обозначения. U_C — напряжение на конденсаторе, $q = CU_C$ — его заряд; через НЭ идёт тот же ток I от A к B, мощность на нём $U_{AB}I = U_1 I + A$. Данные графика: $U_1 = 2$ В, $C = 10$ мФ.

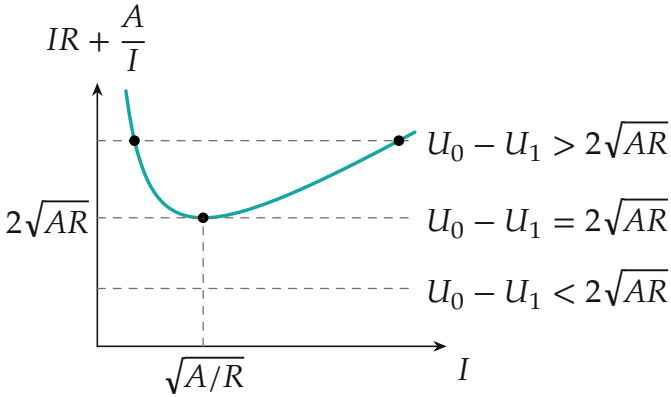
1. Когда в цепи есть постоянный ток (пункт 1). Второй закон Кирхгофа для цепи рисунка 7 (обход по направлению тока): $U_0 = IR + U_1 + A/I$. Умножим на I:

$$RI^2 - (U_0 - U_1)\,I + A = 0.$$

Положительный корень существует, когда дискриминант неотрицателен:

$$(U_0 - U_1)^2 \geq 4AR \quad \Longrightarrow \quad U_0 \geq U_1 + 2\sqrt{AR}$$

(при $U_0 - U_1 > 0$, иначе $I < 0$ невозможен). Второй способ: $U_0 - U_1 = IR + A/I$, а $IR + A/I \geq 2\sqrt{AR}$ — неравенство о среднем, равенство при $IR = A/I$, то есть $I = \sqrt{A/R}$; левая часть никогда не опускается ниже $2\sqrt{AR}$ (рисунок).



Правая часть $IR + A/I$ как функция тока; горизонтали — значения $U_0 - U_1$: два корня, один (касание), ни одного.

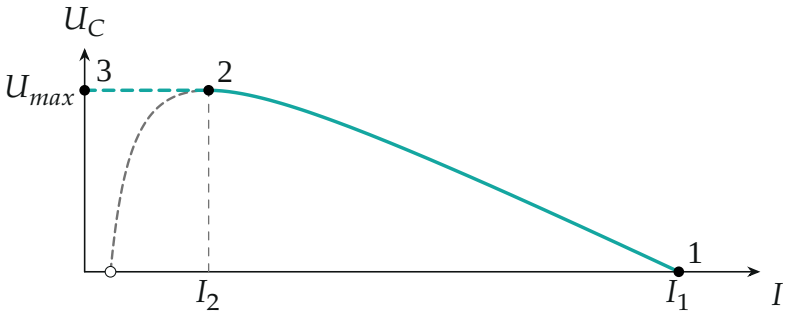
При строгом неравенстве корней два:

$$I = \frac{(U_0 - U_1) \pm \sqrt{(U_0 - U_1)^2 - 4AR}}{2R}.$$

2. Параметры цепи по графику (пункт 2). В цепи рисунка 8 добавлено U_C: $U_0 = IR + U_1 + A/I + U_C$, откуда

$$U_C(I) = U_0 - U_1 - IR - \frac{A}{I}.$$

Это и есть кривая на рисунке 9. Качественно: конденсатор заряжается, U_C растёт со временем, ток убывает; $U_C(I)$ — функция с максимумом: выражение $IR + A/I$ минимально при $I_2 = \sqrt{A/R}$, и $U_{max} = U_0 - U_1 - 2\sqrt{AR}$. До этого момента ток уменьшается вместе с ростом U_C (путь $1 \to 2$), а дальше U_C должно было бы убывать — этого не бывает, и ток обрывается (пунктир $2 \to 3$). Ветвь левее точки 2 недоступна, как и малый корень уравнения в точке 1.



Кривая $U_C(I)$ при $U_0 = 12$ В, $R = 1{,}0$ кОм, $A = 4{,}0$ мВт: сплошная — путь тока от точки 1 к точке 2; серый пунктир — недоступная ветвь; вдоль сплошной линии ток убывает от I_1 к I_2.

Снимаем с графика: $I_1 \approx 9{,}6$ мА (точка 1, $U_C = 0$), $I_2 \approx 2{,}0$ мА, $U_{max} \approx 6$ В. Три уравнения:

$$\begin{aligned} A &= RI_2^2, \\ U_0 - U_1 &= U_{max} + 2RI_2, \\ U_0 - U_1 &= I_1 R + \frac{A}{I_1} \quad (U_C(I_1) = 0). \end{aligned}$$

Подставим первые два в третье: $U_{max} + 2RI_2 = I_1 R + RI_2^2/I_1$, то есть $U_{max} = R(I_1 - I_2)^2/I_1$. Отсюда

$$\begin{aligned} R &= \frac{I_1 U_{max}}{(I_1 - I_2)^2} \approx 1{,}0 \text{ кОм}, \\ A &= RI_2^2 \approx 4{,}0 \text{ мВт}, \\ U_0 &= U_1 + U_{max} + 2RI_2 \approx 12 \text{ В}. \end{aligned}$$

По графику точно получается 997 Ом, 3,99 мВт, 11,99 В; округлённые значения 1,0 кОм, 4,0 мВт, 12 В — те, по которым построен график. Обратите внимание: I_1 — *больший* корень, меньший (0,42 мА) относится к другой, недоступной ветви.

3. Теплота на резисторе (пункт 3). За малое время dt на резисторе выделяется $dQ_R = I^2 R\,dt = RI\,(I\,dt) = RI\,C\,dU_C$. Просуммируем от

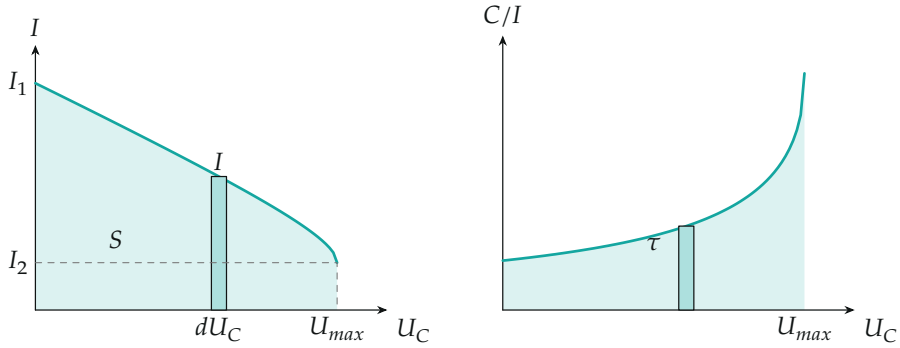
начала до конца (U_C от 0 до U_{max}):

$$Q_R = RC\int_0^{U_{max}} I\,dU_C = RC\,S,$$

где S — площадь под графиком $I(U_C)$ (рисунок). Это можно посчитать по клеточкам графика ($S \approx 37$–38 мВт), а можно точно: по частям,

$$S = \int_0^{U_{max}} I\,dU_C = I_2U_{max} + \int_{I_2}^{I_1} U_C(I)\,dI$$
$$= I_2U_{max} + (U_0 - U_1)(I_1 - I_2) - \frac{R(I_1^2 - I_2^2)}{2} - A\ln\frac{I_1}{I_2} \approx 37{,}6\text{ мВт}.$$

Тогда $Q_R = RC\,S \approx 10^3 \cdot 10^{-2} \cdot 0{,}0376 \approx 0{,}38$ Дж.



Слева: площадь под $I(U_C)$ — множитель в Q_R; справа: площадь под C/I — время τ; тонкая полоска — шаг dU_C.

4. Время протекания тока (пункт 4). Закон сохранения энергии от начала до конца: работа источника $U_0q = CU_0U_{max}$ идёт на тепло в резисторе Q_R, тепло в НЭ и энергию конденсатора $CU_{max}^2/2$. На НЭ за dt выделяется $U_{AB}I\,dt = U_1\,dq + A\,dt$, то есть $Q_{НЭ} = CU_1U_{max} + A\tau$ (мощность A — постоянная часть). Получаем

$$CU_0U_{max} = RCS + CU_1U_{max} + A\tau + \frac{CU_{max}^2}{2}$$
$$\Longrightarrow \quad \tau = \frac{C}{A}\Big[(U_0 - U_1)U_{max} - \frac{U_{max}^2}{2} - RS\Big] \approx 10{,}9\text{ с}.$$

Обратите внимание: τ — разность близких чисел ($60 - 18 - 37{,}6 = 4{,}4$ В^2), поэтому погрешность S в 1 мВт даёт погрешность τ около 2,5 с; графически ответ $10{,}9 \pm 1{,}6$ с.

Второй способ — прямой интеграл: $dt = C\,dU_C/I$. Из уравнения пункта 1 для $V = U_0 - U_1 - U_C$ имеем $I = (V + \sqrt{V^2 - 4AR})/2R$, откуда $1/I = (V - \sqrt{V^2 - 4AR})/2A$ и $dt = -\frac{C}{2A}(V - \sqrt{V^2 - 4AR})dV$. Интегрируя от $V = U_0 - U_1$ до $V = 2\sqrt{AR}$:

$$\tau = \frac{C}{4A}\Big[V_0^2 - 4AR - V_0\sqrt{V_0^2 - 4AR} + 4AR\ln\frac{V_0 + \sqrt{V_0^2 - 4AR}}{2\sqrt{AR}}\Big] \approx 10{,}89\text{ с}, \qquad V_0 = U_0 - U_1.$$

Проверка. Размерности: $[A] =$ Вт, $C/A =$ Ф/Вт, $(U_0 - U_1)U_{max} \sim$ В^2, $RS \sim$ В^2: $\tau \sim$ Ф $\cdot$ В^2/Вт $=$ с. Энергетический баланс с точными числами ($U_0 = 12$ В, $R = 1$ кОм, $A = 4$ мВт): $A_{\text{ист}} = 0{,}72$ Дж $= Q_R + Q_{\text{НЭ}} + W_C = 0{,}377 + 0{,}164 + 0{,}180$ Дж. Точка графика: при $I = 5$ мА $U_C = 10 - 5 - 0{,}8 = 4{,}2$ В, как на рисунке 9. Численное интегрирование уравнения заряда даёт $\tau = 10{,}886$ с и $Q_R = 0{,}3765$ Дж.

Ответ. 1) $U_0 \geq U_1 + 2\sqrt{AR}$; 2) $U_0 \approx 12$ В, $R \approx 1{,}0$ кОм, $A \approx 4{,}0$ мВт; 3) $Q_R \approx 0{,}38$ Дж (≈ 377 мДж); 4) $\tau \approx 10{,}9$ с (графически $\pm 1{,}6$ с).