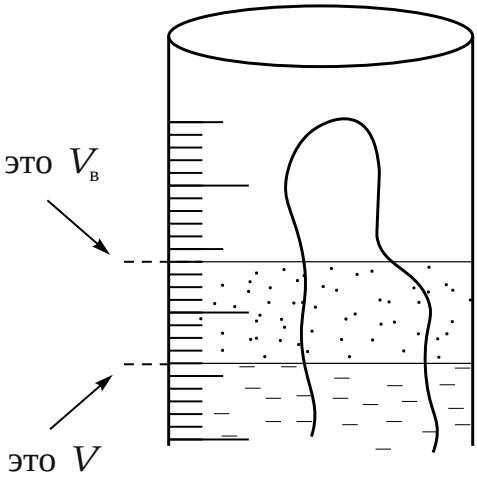
Индийский чай

Задача 1. [ВсОШ 2021/22, заключительный этап, 9 класс, практический тур, задача 1] «Индийский чай».

Оборудование: мерный цилиндр с неизвестной жидкостью и плавающим в ней телом, шприц без делений, стакан с подкрашенной водой плотностью $\rho_в = 1{,}0$ г/см^3, салфетки для поддержания чистоты.



1. Добавляя в мерный цилиндр подкрашенную воду с помощью шприца, заполненного на объём свободного хода поршня, снимите зависимости объёма V неизвестной жидкости, измеренного по границе раздела жидкостей в мерном цилиндре (см. рисунок), и объёма $V_в$ подкрашенной воды, измеренного по верхней границе воды (см. рисунок), от числа N добавленных шприцев. Постройте графики полученных зависимостей в формате А5.

С помощью графиков определите:

2. объём $V_ш$ свободного хода шприца;
3. плотность ρ неизвестной жидкости*;
4. массу m плавающего тела.

Оцените погрешность полученных результатов. Погрешность шкалы измерительного цилиндра равна половине цены деления.

* Неизвестная жидкость не смешивается с водой.

Внимание! Тело из мерного цилиндра извлекать нельзя! Зная, что тело плавает в обеих жидкостях, заранее продумайте ход эксперимента. Ваши действия могут оказаться необратимыми! Неизвестная жидкость замене не подлежит.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача класса «условие плавания + обработка графиков». Тело взвесить нельзя и вынуть нельзя, но мерный цилиндр «взвешивает» его сам: плавающее тело вытесняет жидкость, масса которой равна массе тела. Сначала тело плавает в неизвестной жидкости и поднимает её уровень на объём погружённой части ΔV. Подливаем воду сверху (она легче и ложится слоем): вода тоже выталкивает тело, оно всплывает, и граница раздела V опускается. Когда тело целиком уходит из нижней жидкости, оно плавает в одной воде и вытесняет объём $\Delta V_в$. Сравнив ΔV и $\Delta V_в$, найдём ρ, а по воде — массу тела. Шприц без делений «калибруется» по тому, как растёт $V_в$ на одну порцию воды.

Обозначения. V_0 — собственный объём неизвестной жидкости; ΔV — объём тела под её поверхностью, когда тело плавает только в ней; $\Delta V_в$ — объём тела под водой, когда оно плавает только в воде; $V_ш$ — объём одной порции.

1. Как устроен опыт. Наливаем каждый раз полный шприц (до ограничителя хода поршня) подкрашенной воды и после каждой порции записываем два деления шкалы: V — по границе жидкостей и $V_в$ — по верхнему уровню воды (рис. 1). Воду льём медленно по стенке, чтобы не взбалтывать жидкости. Три характерных состояния — на рис. 2.

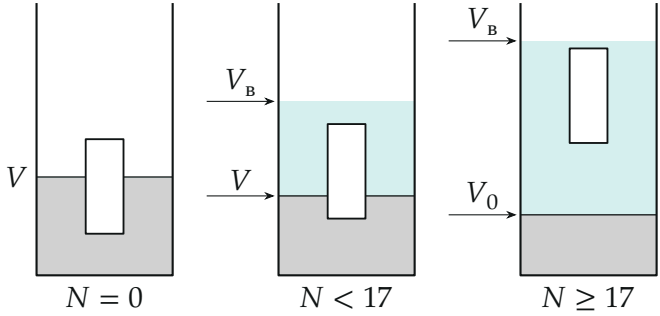


Рис. 2. Тёмное — неизвестная жидкость, светлое бирюзовое — вода, белый брусок — тело. Слева тело плавает в неизвестной жидкости, в середине — в двух жидкостях, справа — только в воде.

2. Таблица измерений (цена деления цилиндра 1 мл, погрешность отсчёта $\pm 0{,}5$ мл; данные авторской установки):

N	$V_в$, мл	V, мл	N	$V_в$, мл	V, мл	N	$V_в$, мл	V, мл
0	43	43	10	64	27	20	83	18
1	45	41	11	66	26	21	84	18
2	47	40	12	68	25	22	85	18
3	50	38	13	70	23	23	86	18
4	52	37	14	73	22	24	87	18
5	54	35	15	75	20	25	88	18
6	56	33	16	76	19	26	90	18
7	58	32	17	78	19	27	91	18
8	60	30	18	80	18	28	92	18
9	62	29	19	81	18			

3. График $V(N)$ и начальный объём. На графике (рис. 3) два прямолинейных участка. При $N \geq 17$ показание $V = 18$ мл больше не меняется: тело уже не касается нижней жидкости, и граница раздела показывает её собственный объём

$$V_0 = 18 \text{ мл}.$$

При $N = 0$ тело плавает только в неизвестной жидкости, и уровень

$V(0) = 43$ мл $= V_0 + \Delta V$:

$$\Delta V = V(0) - V_0 = 43 - 18 = 25 \text{ мл}.$$

Наклонная прямая ($V = 42{,}6 - 1{,}51N$ по методу наименьших квадратов) пересекает горизонталь при $N \approx 16{,}6$ — в этот момент тело выходит из нижней жидкости.

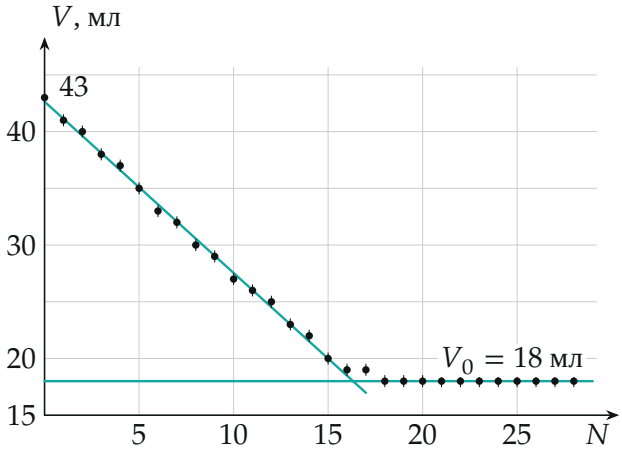


Рис. 3. Положение границы раздела V от числа порций N; отрезки — погрешность $\pm 0{,}5$ мл.

4. График $V_в(N)$ и объём шприца. Когда тело плавает только в воде ($N \geq 17$), под верхним уровнем воды находятся: нижняя жидкость V_0, налитая вода $NV_ш$ и погружённая часть тела $\Delta V_в$, которая от N уже не зависит:

$$V_в = V_0 + \Delta V_в + V_ш N.$$

Это прямая: её наклон — объём шприца, отрезок на оси ординат — $V_0 + \Delta V_в$. Метод наименьших квадратов по 12 точкам $N = 17 \ldots 28$ даёт (рис. 4)

$$V_в = 57{,}8 + 1{,}227\,N \text{ (мл)}, \qquad V_ш = 1{,}23 \text{ мл}.$$

При $N < 17$ уровень $V_в$ растёт быстрее (наклон 2,08 мл на порцию): тело всплывает и всё большей частью оказывается под водой. Две прямые

пересекаются при $N \approx 17$ — тот же момент, что и по рис. 3.

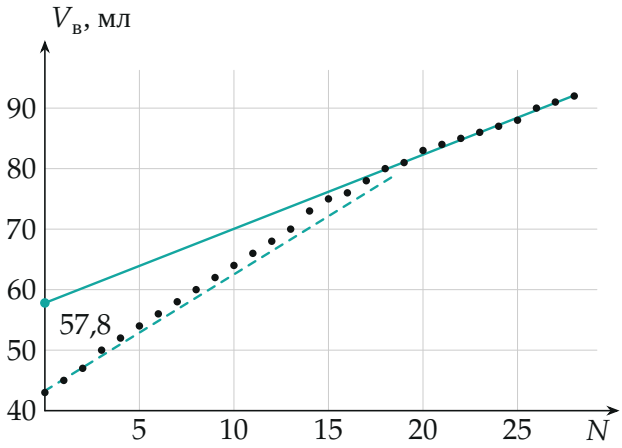


Рис. 4. Уровень воды $V_в$ от N: сплошная прямая — тело плавает только в воде (продолжена до $N = 0$), пунктир — тело в двух жидкостях. Погрешность $\pm 0{,}5$ мл меньше размера точки.

5. Объём под водой. Отрезок прямой на оси ординат:

$$V_0 + \Delta V_в = 57{,}8 \text{ мл} \;\Rightarrow\; \Delta V_в = 57{,}8 - 18 = 39{,}8 \approx 40 \text{ мл}.$$

6. Плотность жидкости. Условие плавания (сила Архимеда уравновешивает силу тяжести тела) в неизвестной жидкости и в воде:

$$\rho g\,\Delta V = mg, \qquad \rho_в g\,\Delta V_в = mg.$$

Масса тела одна и та же, поэтому

$$\rho = \rho_в \frac{\Delta V_в}{\Delta V} = 1{,}0 \cdot \frac{39{,}8}{25} \approx 1{,}6 \text{ г/см}^3.$$

7. Масса тела — прямо из плавания в воде:

$$m = \rho_в\,\Delta V_в = 1{,}0 \text{ г/см}^3 \cdot 39{,}8 \text{ см}^3 \approx 40 \text{ г}.$$

8. Погрешности. Каждое показание шкалы — с точностью $\pm 0{,}5$ мл, разность двух показаний — ± 1 мл: $\Delta V = (25 \pm 1)$ мл, $\Delta V_в = (40 \pm 1)$ мл.

Наклон: 1,23 мл на порцию с погрешностью около ± 1 мл на интервале в 11 порций, то есть $V_ш = (1{,}23 \pm 0{,}07)$ мл (у организаторов — 1,25 мл, в пределах погрешности). Относительные погрешности складываются:

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{1}{25} + \frac{1}{40} \approx 0{,}065, \qquad \rho = (1{,}6 \pm 0{,}1)\ \text{г/см}^3, \qquad m = (40 \pm 1)\ \text{г}.$$

У организаторов $m = \rho\Delta V = 1{,}6 \cdot 25 = (40 \pm 6)$ г — то же значение; через воду погрешность меньше, потому что плотность воды известна точно.

Обратите внимание: порядок опыта необратим. Вода ложится поверх неизвестной жидкости и не смешивается с ней, поэтому сначала снимают $V(0)$, пока воды нет совсем, — иначе ΔV уже не узнать.

Проверка. Размерность: $\rho_в \Delta V_в / \Delta V$ — плотность, $\rho_в \Delta V_в$ — масса. Знак: $\rho > \rho_в$, и потому в тяжёлой жидкости тело сидит мельче ($25 < 40$ мл) — согласуется с тем, что неизвестная жидкость лежит под водой. Второй способ найти момент «отрыва»: оба графика независимо дают $N \approx 17$.

Цилиндр работает как весы: объём, вытесненный плавающим телом, умноженный на плотность жидкости, — это масса тела.

Ответ. 1) таблица и графики $V(N)$, $V_в(N)$ (рис. 3, 4); 2) $V_ш = (1{,}23 \pm 0{,}07)$ мл; 3) $\rho = (1{,}6 \pm 0{,}1)$ г/см^3; 4) $m = (40 \pm 1)$ г.