Автобус

Задача 1. [ВсОШ 2021/22, заключительный этап, 9 класс, задача 1] «Автобус».

Настя стоит в поле на расстоянии s от прямой дороги, по которой от остановки с постоянным ускорением a в её сторону начинает движение автобус (рис. 1). Расстояние от остановки до девочки равно l. Через какое минимальное время τ Настя сможет оказаться рядом с автобусом, если она умеет бегать со скоростью v? Временем разгона девочки можно пренебречь.

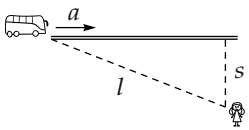


Рис. 1

▲ **Решение. Что происходит.** За время t Настя может оказаться в любой точке круга радиуса vt вокруг своего начального положения, а автобус к этому моменту находится в определённой точке дороги. Встреча в момент t возможна, если автобус в этот момент внутри круга: расстояние $d(t)$ от Насти до автобуса не больше vt. Главная идея — найти первый момент, когда $d(t) = vt$: Настя бежит по прямой и приходит в точку встречи одновременно с автобусом (ждать на дороге нет смысла — можно было бы добежать позже до той же точки). Это задача класса «встреча по кратчайшему пути»: теорема Пифагора для точки встречи.

Обозначения. O — остановка, D — Настя, H — ближайшая к Насте точка дороги, K — точка встречи; $L = OH = \sqrt{l^2 - s^2}$ — начальное расстояние вдоль дороги между автобусом и девочкой; ось x — вдоль дороги от O.

1. Где автобус в момент t. Автобус стартует из покоя с постоянным ускорением: $x(t) = \dfrac{at^2}{2}$. До точки H ему остаётся $L - \dfrac{at^2}{2}$ (отрицательная величина — автобус уже проехал H).

2. Условие встречи. Расстояние от Насти до автобуса (рис. 2) — гипотенуза прямоугольного треугольника DHK с катетами s и $\left|L - \frac{at^2}{2}\right|$.

Настя успевает, если

$$d^2(t) = \left(L - \frac{at^2}{2}\right)^2 + s^2 \le (vt)^2.$$

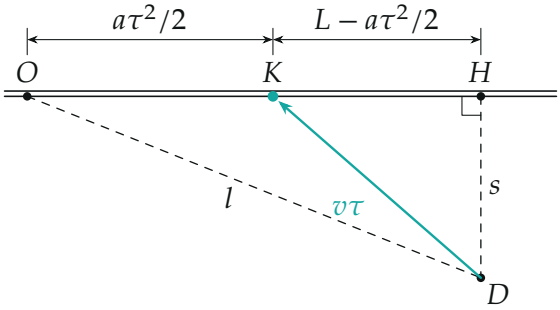


Рис. 2. Настя бежит по прямой DK и приходит в K одновременно с автобусом.

3. Качественная картина. Сначала автобус приближается, и $d(t)$ убывает от l до s (автобус в H), потом автобус уезжает, и $d(t)$ растёт как $at^2/2$ — быстрее любой прямой vt (рис. 3). Поэтому прямая vt либо пересекает кривую $d(t)$ дважды (между пересечениями встреча возможна), либо не пересекает вовсе — тогда Настя не успеет никогда. Нам нужно первое пересечение.

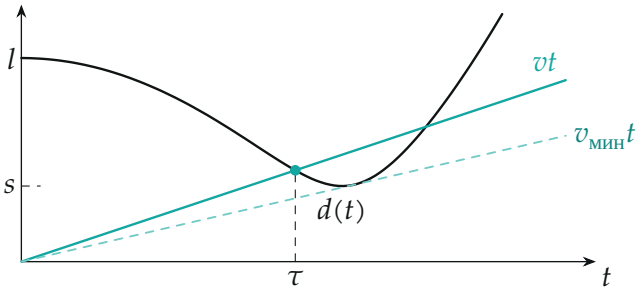


Рис. 3. Расстояние до автобуса $d(t)$ и радиус досягаемости vt; первое пересечение — τ. Пунктир — наименьшая скорость, при которой встреча ещё возможна (касание).

4. Уравнение для τ. Раскроем скобки в равенстве $d^2 = (v\tau)^2$ и учтём $L^2 + s^2 = l^2$:

$$\frac{a^2\tau^4}{4} - (aL + v^2)\,\tau^2 + l^2 = 0.$$

Это квадратное уравнение относительно τ^2. Первому пересечению отвечает меньший корень:

$$\tau^2 = \frac{2}{a^2}\left(aL + v^2 - \sqrt{(aL + v^2)^2 - a^2l^2}\right),$$

$$(aL + v^2)^2 - a^2l^2 = v^4 + 2av^2L - a^2s^2.$$

Ответ:

$$\tau = \frac{1}{a}\sqrt{2\left(v^2 + aL - \sqrt{v^4 + 2av^2L - a^2s^2}\right)}, \qquad L = \sqrt{l^2 - s^2}.$$

5. Когда встреча возможна. Корни вещественны при $v^4 + 2av^2L - a^2s^2 \geq 0$, то есть $v^2 \geq a\left(\sqrt{L^2 + s^2} - L\right) = a(l - L)$. При меньшей скорости прямая vt проходит ниже кривой $d(t)$ (рис. 3), и Настя автобус не догонит.

Обратите внимание: из двух корней биквадратного уравнения нужен меньший — второй корень соответствует моменту, когда автобус уже уезжает и выходит из круга досягаемости.

Проверка. Размерность: v^2, aL и $\sqrt{a^2s^2}$ — м^2/с^2, τ — с. Предел $a \to 0$ (автобус стоит в O): раскладывая корень, $\tau \to l/v$ — Настя просто бежит к остановке. Предел $s = 0$ (Настя на дороге): $\tau^2 = \frac{2}{a^2}(aL + v^2 - v\sqrt{v^2 + 2aL})$, то есть $v\tau + \frac{a\tau^2}{2} = L$ — бегут навстречу друг другу. Численно: при $L = 100$ м, $s = 40$ м, $a = 1$ м/с^2, $v = 4$ м/с формула даёт $\tau = 12{,}08$ с, перебор по времени — то же.

Физический смысл: встреча — первый момент, когда растущий круг досягаемости Насти «накрывает» автобус.

Ответ. $\tau = \frac{1}{a}\sqrt{2\left(v^2 + aL - \sqrt{v^4 + 2av^2L - a^2s^2}\right)}$, где $L = \sqrt{l^2 - s^2}$; встреча возможна при $v^4 + 2av^2L - a^2s^2 \geq 0$.