Черепахи

Задача 2. [ВсОШ 2021/22, заключительный этап, 9 класс, задача 2] «Черепахи».

Три черепахи, движущиеся с постоянными по модулю скоростями и все время поддерживающие курс одна на другую, в момент запуска секундомера находились в вершинах равнобедренного прямоугольного треугольника ABC с катетами длиной l (рис. 2). Скорость первой черепахи $v_1 = v$, где v — известная величина, а скорости второй и третьей черепах v_2 и v_3 таковы, что в процессе их движения углы в треугольнике, образованном черепахами, не изменяются. Найдите:

1. время t, через которое черепахи встретятся;
2. модули скоростей v_2 и v_3 второй и третьей черепах;
3. ускорения черепах в начальный момент времени;
4. на каком расстоянии s от места старта первой черепахи произойдёт их встреча.

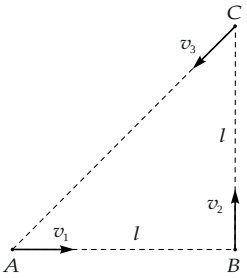


Рис. 2

▲ **Решение. Что происходит.** Углы треугольника постоянны, значит, в любой момент он подобен исходному: он одновременно сжимается и поворачивается. Все стороны сокращаются в одном отношении, а направления сторон (и скоростей черепах, идущих вдоль сторон) поворачиваются с одной угловой скоростью ω. Главная идея — считать скорости изменения длин сторон: это суммы проекций скоростей на стороны. Это задача класса «преследование»: скорость сближения двух тел — сумма проекций их скоростей на соединяющую их прямую.

Обозначения. Черепахи 1, 2, 3 стартуют из A, B, C; $a = AB = BC$ — катеты в произвольный момент, $AC = a\sqrt{2}$; ω — угловая скорость поворота сторон; O — точка встречи; $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$ — перемещения первой и второй черепах до встречи.

Пункт 1. Время встречи. Скорость сближения черепах 1 и 2 равна сумме проекций их скоростей на прямую AB (поперечные составляющие расстояние в первом порядке не меняют). $\vec{v}_1$ направлена вдоль AB, $\vec{v}_2$ — вдоль BC, перпендикулярно AB (угол B остаётся прямым):

$$-\frac{da}{dt} = v_1 + 0 = v.$$

Сторона AB сокращается с постоянной скоростью и исчезает через $t = l/v$. Треугольник подобен исходному, поэтому вместе с AB стягиваются и другие стороны: черепахи встречаются одновременно.

Пункт 2. Скорости второй и третьей черепах.

1. Скорости сокращения BC и AC. На BC проецируются $\vec{v}_2$ (вдоль BC) и $\vec{v}_3$ (вдоль CA, под углом 45° к CB); на AC — $\vec{v}_3$ и $\vec{v}_1$ (под углом 45° к AC), рис. 3:

$$-\frac{d(BC)}{dt} = v_2 + \frac{v_3}{\sqrt{2}}, \qquad -\frac{d(AC)}{dt} = v_3 + \frac{v}{\sqrt{2}}.$$

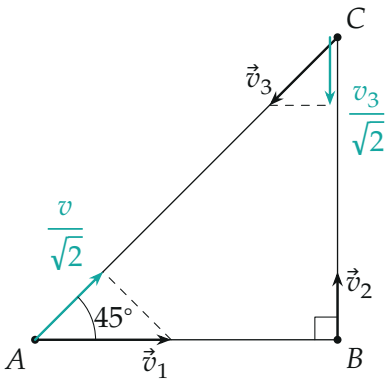


Рис. 3. Проекции скоростей на стороны (бирюзой — составляющие, сокра-

щающие AC и BC).

2. Условие подобия. $BC = a$ и $AC = a\sqrt{2}$ в любой момент, поэтому $\frac{d(BC)}{dt} = -v$, $\frac{d(AC)}{dt} = -\sqrt{2}\,v$:

$$v_3 + \frac{v}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,v \;\Rightarrow\; v_3 = \frac{v}{\sqrt{2}}; \qquad v_2 + \frac{v_3}{\sqrt{2}} = v \;\Rightarrow\; v_2 = \frac{v}{2}.$$

Пункт 3. Ускорения в начальный момент.

3. Угловая скорость поворота. Модули скоростей постоянны, поэтому касательных ускорений нет — только нормальные, от поворота векторов скорости. Все стороны поворачиваются с одной угловой скоростью ω (треугольник подобен себе), а с ними и скорости. Найдём ω по стороне AB: в системе отсчёта первой черепахи вторая движется перпендикулярно AB со скоростью v_2 (скорость $\vec{v}_1$ вдоль AB поворота AB не создаёт), поэтому

$$\omega = \frac{v_2}{AB} = \frac{v}{2l} \quad \text{в начальный момент.}$$

4. Ускорения. За время dt вектор скорости черепахи i поворачивается на угол $\omega\,dt$ и получает перпендикулярное приращение $v_i\omega\,dt$, так что $a_i = v_i\omega$:

$$a_1 = \frac{v^2}{2l}, \qquad a_2 = \frac{v}{2}\cdot\frac{v}{2l} = \frac{v^2}{4l}, \qquad a_3 = \frac{v}{\sqrt{2}}\cdot\frac{v}{2l} = \frac{v^2}{2\sqrt{2}\,l}.$$

Ускорение каждой черепахи перпендикулярно её скорости и направлено в сторону поворота (против часовой стрелки), рис. 4.

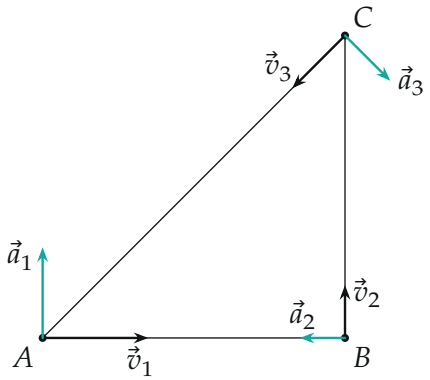


Рис. 4. Ускорения в начальный момент: перпендикулярны скоростям, модули $2:1:\sqrt{2}$.

Пункт 4. Место встречи.

5. Перемещения перпендикулярны. В любой момент $\vec{v}_2$ повёрнута относительно $\vec{v}_1$ на 90° (угол B прямой) и вдвое короче. Значит, и сумма малых перемещений $\vec{v}_2\,dt$ — это сумма $\vec{v}_1\,dt$, повёрнутая на 90° и уменьшенная вдвое:

$$\vec{s}_2 \perp \vec{s}_1, \qquad s_2 = \frac{s_1}{2}.$$

6. Треугольник AOB**.** Обе черепахи приходят в одну точку O: $\vec{s}_1 = \overrightarrow{AB} + \vec{s}_2$. В треугольнике AOB угол при O прямой (рис. 5), по теореме Пифагора

$$s_1^2 + \frac{s_1^2}{4} = l^2 \;\Rightarrow\; s = s_1 = \frac{2l}{\sqrt{5}} \approx 0{,}89\,l.$$

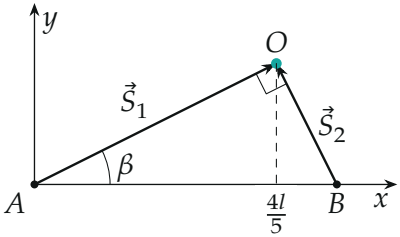


Рис. 5. Перемещения $\vec{s}_1 \perp \vec{s}_2$, $s_2 = s_1/2$; $\operatorname{tg}\beta = 1/2$.

Численное интегрирование движения (рис. 6) подтверждает: черепахи сходятся в точку O на расстоянии $0{,}894\,l$ от A за время $0{,}999\,l/v$; пунктиром — треугольник черепах в момент $t = l/(3v)$.

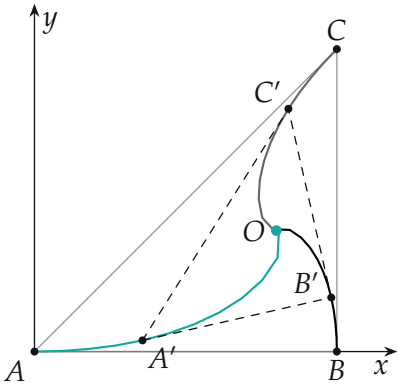


Рис. 6. Траектории черепах (бирюзой — первая) и точка встречи O.

Обратите внимание: s — расстояние по прямой от старта до точки встречи, а не путь: путь первой черепахи равен $vt = l$, он длиннее s, потому что траектория изогнута.

Проверка. Размерности: $[l/v] = \text{с}$, $[v^2/l] = \text{м/с}^2$. Путь первой черепахи l больше перемещения $2l/\sqrt{5} \approx 0{,}89\,l$, как и должно быть для кривой. Второй способ для ускорения: радиус кривизны траектории первой черепахи $R_1 = v/\omega = 2l$, и $a_1 = v^2/R_1 = v^2/(2l)$.

Физический смысл: треугольник черепах ведёт себя как фигура, которая равномерно сжимается и закручивается вокруг неподвижной точки O.

Ответ. 1) $t = \dfrac{l}{v}$; 2) $v_2 = \dfrac{v}{2}$, $v_3 = \dfrac{v}{\sqrt{2}}$; 3) $a_1 = \dfrac{v^2}{2l}$, $a_2 = \dfrac{v^2}{4l}$, $a_3 = \dfrac{v^2}{2\sqrt{2}\,l}$; 4) $s = \dfrac{2l}{\sqrt{5}}$.