Ап стену

Задача 3. [ВсОШ 2021/22, заключительный этап, 9 класс, задача 3] «Ап стену».

На гладкой горизонтальной поверхности на расстоянии s от стены покоится шайба массой m. На неё налетает вторая такая же шайба, движущаяся перпендикулярно стене со скоростью u (рис. 3, вид сверху). Известно, что удары шайб о стену упругие, а при центральном столкновении самих шайб рассеивается доля α ($0 < \alpha < 1$) их суммарной кинетической энергии в системе отсчёта их центра масс. Постройте качественный график зависимости расстояния l между первой шайбой и стеной от времени t, отсчитываемого от момента первого столкновения шайб. Отметьте на нём характерные точки.

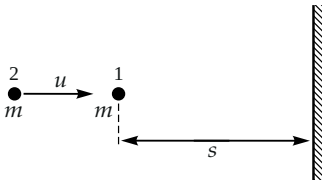


Рис. 3

Рис. 3

▲ **Решение. Что происходит.** Шайбы одинаковые, поэтому удобна система отсчёта центра масс: в ней до удара шайбы летят навстречу с равными по модулю скоростями, а после удара — разлетаются с равными скоростями, уменьшенными так, чтобы кинетическая энергия упала в $1/(1-\alpha)$ раз. Первая шайба после первого удара уходит к стене быстрее второй, отражается от стены упруго и снова сталкивается со второй. После второго удара первая шайба останавливается и дальше стоит. Это задача класса «соударения в системе центра масс»: импульс сохраняется, энергия в СЦМ теряет долю α.

Обозначения. Ось x — к стене; $\beta = \sqrt{1-\alpha}$; u_1, u_2 — скорости шайб 1 и 2 после первого удара; t_1 — момент удара первой шайбы о стену; t_* — момент второго удара шайб.

1. Удар шайб в СЦМ. Внешние горизонтальные силы во время удара отсутствуют (поверхность гладкая), импульс системы сохраняется, и скорость центра масс постоянна:

$$V = \frac{mu + m \cdot 0}{2m} = \frac{u}{2}.$$

В СЦМ скорости шайб $\pm u/2$, энергия $2 \cdot \frac{m(u/2)^2}{2}$. После удара в СЦМ шайбы разлетаются с равными скоростями w (импульс в СЦМ остаётся нулевым), и энергия уменьшается в $1 - \alpha$ раз:

$$2 \cdot \frac{mw^2}{2} = (1 - \alpha) \cdot 2 \cdot \frac{m(u/2)^2}{2} \;\Rightarrow\; w = \beta \frac{u}{2}.$$

2. Скорости после первого удара. Возвращаемся в систему стены, прибавляя V (рис. 4):

$$u_1 = \frac{u}{2} + \frac{\beta u}{2} = \frac{(1+\beta)u}{2}, \qquad u_2 = \frac{u}{2} - \frac{\beta u}{2} = \frac{(1-\beta)u}{2}.$$

Обе шайбы движутся к стене, первая быстрее.



Рис. 4. Скорости шайб (вид сверху, стена справа; длины стрелок — для $\alpha = 0{,}5$).

3. Удар о стену. Первая шайба проходит s со скоростью u_1 и отражается упруго, сохраняя модуль скорости:

$$t_1 = \frac{s}{u_1} = \frac{2s}{(1+\beta)u}.$$

До этого момента $l(t) = s - u_1 t$ — отрезок прямой от $(0;\, s)$ до $(t_1;\, 0)$.

4. Второй удар шайб. После отражения шайбы сближаются со скоростью $u_1 + u_2 = u$. Проще всего найти момент встречи так: пока шайбы не столкнулись повторно, путь первой (до стены и обратно) плюс путь второй — это $2s$ минус расстояние между ними, а сумма скоростей всё время равна $u_1 + u_2 = u$. Встреча — когда суммарный путь равен $2s$:

$$t_* = \frac{2s}{u}.$$

Первая шайба к этому моменту отошла от стены на

$$l_* = u_1\,(t_* - t_1) = \frac{(1+\beta)u}{2}\left(\frac{2s}{u} - \frac{2s}{(1+\beta)u}\right) = \beta s = s\sqrt{1-\alpha}.$$

5. После второго удара. Скорости до удара (ось x к стене): первая $-u_1$, вторая $+u_2$. Скорость центра масс

$$V' = \frac{-u_1 + u_2}{2} = -\frac{\beta u}{2},$$

в СЦМ шайбы снова сближаются со скоростями $\pm u/2$ (первая $-\frac{(1+\beta)u}{2} + \frac{\beta u}{2} = -\frac{u}{2}$). После удара они разлетаются со скоростями $\pm\beta u/2$: первая получает $+\beta u/2$, и в системе стены её скорость

$$v_1 = V' + \frac{\beta u}{2} = 0, \qquad v_2 = V' - \frac{\beta u}{2} = -\beta u.$$

Первая шайба останавливается на расстоянии $s\sqrt{1-\alpha}$ от стены, вторая уезжает от стены и больше не возвращается. Дальше $l = s\sqrt{1-\alpha}$.

6. График. Движение обеих шайб удобно видеть на одном графике

расстояний до стены (рис. 5); искомый график $l(t)$ — на рис. 6. Наклоны двух отрезков $l(t)$ одинаковы по модулю: первая шайба отражается от стены без потери скорости.

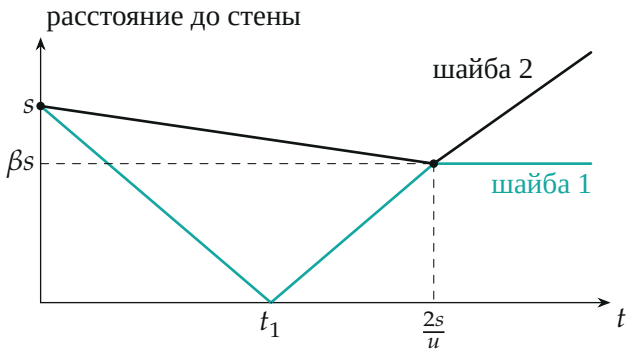


Рис. 5. Расстояния шайб до стены ($\alpha = 0{,}5$): точки — удары шайб, излом бирюзовой линии на оси — удар о стену.

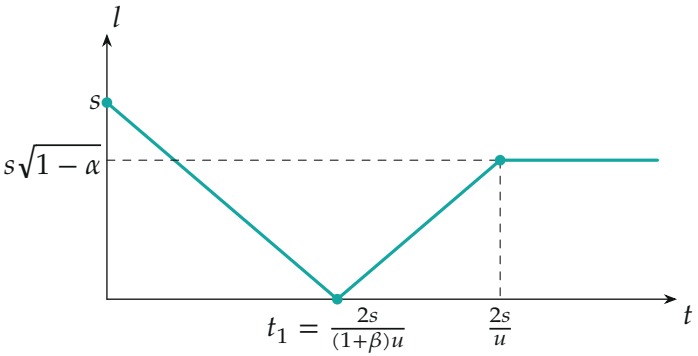


Рис. 6. Ответ: расстояние l от первой шайбы до стены.

Обратите внимание: момент второго удара $2s/u$ не зависит от α — сумма скоростей шайб равна u при любой потере энергии, потому что так велит закон сохранения импульса.

Проверка. Предел $\alpha = 0$ (упругий удар, $\beta = 1$): шайбы обменивают-ся скоростями, первая летит со скоростью u, $t_1 = s/u$, возвращается к точке старта за $2s/u$ и, снова обменявшись скоростями, останавливается

на расстоянии s — как и даёт ответ. Предел $\alpha \to 1$ (абсолютно неупругий, $\beta = 0$): шайбы слипаются и едут вместе с $u/2$, $t_1 = 2s/u$, и l после удара о стену остаётся нулём — график упирается в ось. Размерность: s/u — время.

Физический смысл: каждое столкновение в системе центра масс просто «разворачивает» шайбы и умножает их скорость на $\sqrt{1-\alpha}$; после двух таких ударов первая шайба оказывается в покое.

Ответ. $l(t)$: при $t = 0$ $l = s$; линейное убывание до $l = 0$ при $t_1 = \dfrac{2s}{u(1+\sqrt{1-\alpha})}$ (удар о стену); линейный рост с той же по модулю скоростью до $l = s\sqrt{1-\alpha}$ при $t = \dfrac{2s}{u}$ (второй удар шайб); далее $l = s\sqrt{1-\alpha}$ (первая шайба стоит).