Ледяная картина

Задача 4. [ВсОШ 2021/22, заключительный этап, 9 класс, задача 4] «Ледяная картина».

После добавления в сосуд с водой некоторого количества льда в нём устанавливается тепловое равновесие. На рисунке 4 приведена диаграмма, на которой выделены области с указанием конечного состояния содержимого сосуда в зависимости от температуры $t_л$ и массы $m_л$ добавленного льда.

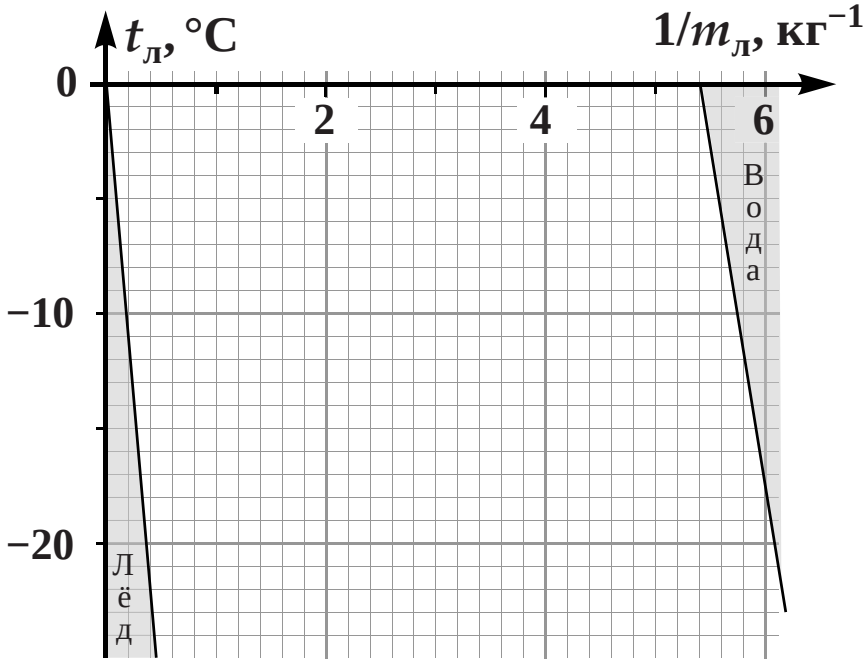


Рис. 4

1. Какая температура установится в сосуде, если в него добавить 0,5 кг льда при температуре −10 °C?
2. Определите начальную температуру t и массу m воды в сосуде.

Тепловыми потерями и теплоёмкостью сосуда можно пренебречь. Содержимое сосуда не выливается. Удельная теплота плавления льда $\lambda = 330$ кДж/кг, удельная теплоёмкость льда $c_л = 2100$ Дж/(кг·°C), удельная теплоёмкость воды $c = 4200$ Дж/(кг·°C).

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача класса «тепловой баланс с фазовым переходом». В сосуде всегда возможны три конечных состояния: всё замёрзло (лёд не теплее 0 °C), всё растаяло (вода не холоднее 0 °C) и смесь льда с водой при 0 °C. Границы областей на диаграмме — это ровно те случаи, когда содержимое оказалось при 0 °C целиком в одной фазе: «весь лёд при 0 °C» и «вся вода при 0 °C». Для каждой границы запишем уравнение теплового баланса — оно и есть уравнение прямой на диаграмме. По наклонам прямых найдём t и m.

Обозначения. m, t — масса и начальная температура воды; $m_л$, $t_л < 0$ — масса и температура льда; $X = 1/m_л$ — величина по горизонтальной оси диаграммы.

Пункт 1.

1. Где лежит точка. Льда $m_л = 0{,}5$ кг, значит, $X = 1/m_л = 2$ кг$^{-1}$, а $t_л = -10$ °C. Точка $A(2; -10)$ лежит в белой области между полосой «Лёд» и полосой «Вода» (рис. 5). Белая область — это не «лёд» и не «вода», то есть в сосуде лёд и вода одновременно. Две фазы одного вещества при нормальном давлении находятся в равновесии только при температуре плавления, поэтому

$$t_1 = 0\,°\text{C}.$$

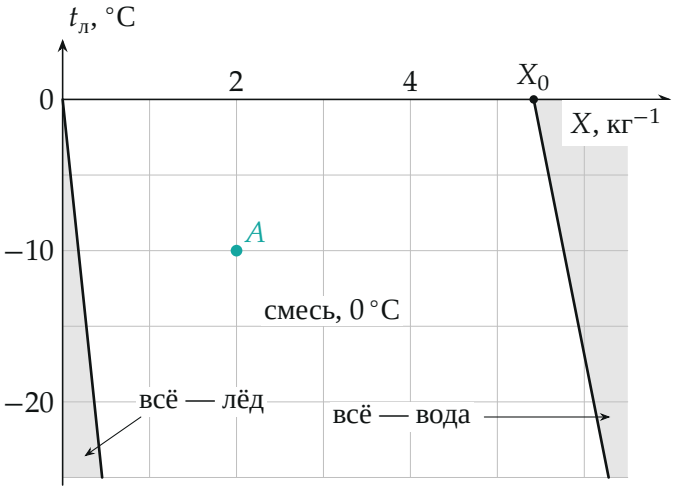


Рис. 5. Диаграмма в осях $t_л$, $X = 1/m_л$: левая граница — «весь лёд при $0\,^\circ C$», правая — «вся вода при $0\,^\circ C$»; точка A — случай пункта 1.

Пункт 2.

2. Граница «весь лёд при $0\,^\circ$C». Уравнение теплового баланса (сосуд не нагревается, потерь нет, поэтому сколько теплоты отдала вода, столько получил лёд): вода остывает от t до $0\,^\circ$C и вся замерзает, лёд нагревается от $t_л$ до $0\,^\circ$C (рис. 6, слева):

$$mct + m\lambda = m_л c_л (0 - t_л),$$

откуда

$$t_л = -\frac{m(ct+\lambda)}{c_л}\cdot\frac{1}{m_л} = -k_1 X, \qquad k_1 = \frac{m(ct+\lambda)}{c_л}.$$

В осях $(X;\, t_л)$ это прямая через начало координат с отрицательным наклоном — граница полосы «Лёд». Левее неё (льда больше или он холоднее) вода замерзает вся, и лёд остаётся холоднее нуля.

3. Граница «вся вода при $0\,^\circ$C». Теперь вода остывает от t до $0\,^\circ$C, а лёд нагревается до $0\,^\circ$C и весь тает (рис. 6, справа):

$$mct = m_л c_л (0 - t_л) + m_л \lambda,$$

откуда

$$t_л = \frac{\lambda}{c_л} - \frac{mct}{c_л}\cdot\frac{1}{m_л} = \frac{\lambda}{c_л} - k_2 X, \qquad k_2 = \frac{mct}{c_л}.$$

Это прямая, пересекающая ось X в точке $X_0 = \lambda/(c_л k_2)$. Правее неё (льда мало) лёд тает весь.

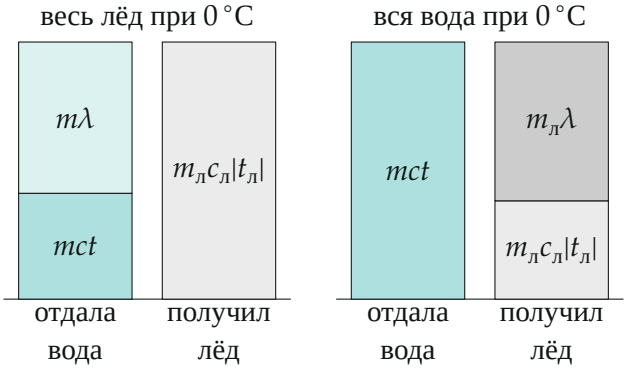


Рис. 6. Тепловой баланс на двух границах: высота столбика — количество теплоты; отданное водой равно полученному льдом.

4. Снимаем наклоны с диаграммы. Левая прямая проходит через начало координат и, например, через точку $t_л = -25\,°\text{C}$, $X \approx 0{,}455\ \text{кг}^{-1}$:

$$k_1 = \frac{25}{0{,}455} \approx 55\ °\text{C} \cdot \text{кг}.$$

Правая прямая пересекает ось X при $X_0 \approx 5{,}4\ \text{кг}^{-1}$, и по формуле пункта 3

$$k_2 = \frac{\lambda}{c_л X_0} = \frac{330\,000}{2100 \cdot 5{,}4} \approx 29\ °\text{C} \cdot \text{кг}.$$

Тот же наклон даёт и вторая точка прямой: при $t_л = -23\,°\text{C}$ $X \approx 6{,}17\ \text{кг}^{-1}$, $k_2 = 23/(6{,}17 - 5{,}40) \approx 30$ — в пределах точности чтения графика.

5. Температура воды. Делим k_1 на k_2 — масса воды и $c_л$ сокращаются:

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{ct + \lambda}{ct} = 1 + \frac{\lambda}{ct},$$

откуда

$$t = \frac{\lambda}{c\,(k_1/k_2 - 1)} = \frac{330\,000}{4200 \cdot (55/29 - 1)} \approx 88\,°\text{C}.$$

6. Масса воды. Из $k_2 = mct/c_л$:

$$m = \frac{c_л k_2}{ct} = \frac{2100 \cdot 29}{4200 \cdot 88} \approx 0{,}165 \text{ кг}.$$

Обратите внимание: обе границы на диаграмме — прямые только потому, что по горизонтали отложена величина $1/m_л$, а не $m_л$. Уравнения баланса линейны по $m_л$, но после деления на $m_л$ становятся линейными по $1/m_л$.

Обратите внимание: числа сняты с графика, поэтому разумный разброс ответа — несколько градусов и несколько граммов (у организаторов — 84–92 °C и 160–170 г).

Проверка. Размерность: λ/c — в градусах, $c_л k_2/(ct)$ — в килограммах. Подстановка в баланс «весь лёд при 0 °C» для точки на левой прямой $X = 0{,}455$, $m_л = 2{,}2$ кг: вода отдаёт $0{,}165\,(4200 \cdot 88 + 330\,000) \approx 1{,}15 \cdot 10^5$ Дж, лёд получает $2{,}2 \cdot 2100 \cdot 25 \approx 1{,}15 \cdot 10^5$ Дж — совпало. Для пункта 1: лёд массой 0,5 кг при нагреве до нуля берёт 10,5 кДж, а вода, остывая до нуля, отдаёт $0{,}165 \cdot 4200 \cdot 88 \approx 61$ кДж — хватает, чтобы нагреть лёд, но на плавление всех 0,5 кг нужно ещё 165 кДж, которых нет. Значит, растает только часть льда — смесь при 0 °C, как и следует из диаграммы.

Диаграмма — это «карта» уравнений теплового баланса: каждая граница — одно уравнение, и по двум наклонам находятся две неизвестные воды.

Ответ. 1) 0 °C (в сосуде лёд и вода в равновесии); 2) $t \approx 88$ °C, $m \approx 0{,}165$ кг.