Электроцикл

Задача 5. [ВсОШ 2021/22, заключительный этап, 9 класс, задача 5] «Электроцикл».

Фрагмент электрической цепи состоит из соединённых параллельно диодов, резисторов, ключей и идеального вольтметра (рис. 5). Диоды D_1 и D_2 открываются при разных напряжениях ($U_{01} < U_{02}$). Их вольт-амперная характеристика приведена на рисунке 6. На диаграмме (рис. 7) изображён циклический процесс 1 – 2 – 3 – 4 – 1, отражающий связь силы тока I, входящего в фрагмент, и показаний вольтметра U. Масштаб по оси ординат утерян, но известно, что в течение цикла сила тока I изменялась с постоянной по модулю скоростью $k = 1$ мА/с, а количество теплоты, выделившееся на резисторах в процессе 2 – 3, равно $Q_{23} = 6{,}4$ Дж.

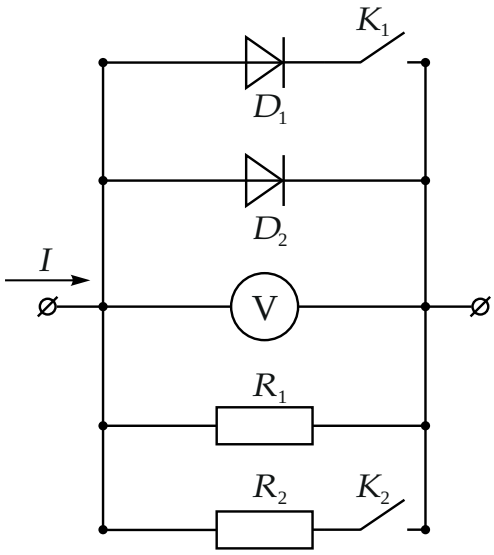


Рис. 5

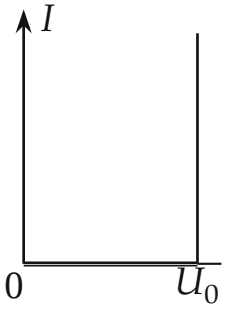


Рис. 6

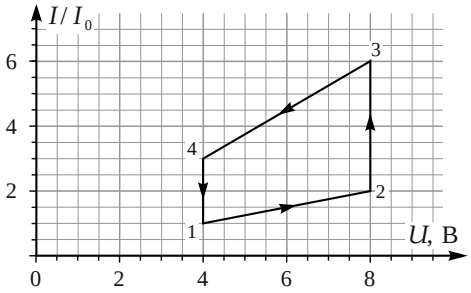


Рис. 7

Опишите возможную последовательность действий с ключами, которая приведёт к такому виду циклического процесса. Определите:

1. напряжения открытия диодов U_{01} и U_{02};
2. сопротивления резисторов R_1 и R_2;
3. время τ, которое длился цикл;
4. количество теплоты Q_{41}, выделившееся на резисторах на участке $4 - 1$.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача класса «цепь с идеальными диодами». Диод с ВАХ рис. 6 — «ступенька»: при $U < U_0$ ток через него не идёт, а открытый диод держит на себе ровно U_0 при любом токе. Поэтому на диаграмме $I(U)$ участки, где U постоянно, а ток меняется, — это открытый диод; наклонные участки — ток идёт только через резисторы, и по их наклону находится сопротивление. Все элементы включены параллельно, значит, вольтметр показывает одно и то же напряжение U на каждом из них.

Обозначения. I_0 — ток в точке 1 (единица оси ординат); I_1, I_2 — токи через резисторы R_1, R_2; t_{ij} — длительность участка $i-j$.

1. Напряжения открытия диодов. На участках $2-3$ и $4-1$ ток меняется, а показание вольтметра стоит на месте: $U = 8$ В и $U = 4$ В. Резистор при постоянном U пропускает постоянный ток, значит, добавка тока идёт через открытый диод, и напряжение на нём равно напряжению открытия. Так как $U_{01} < U_{02}$,

$$U_{01} = 4\text{ В}, \qquad U_{02} = 8\text{ В}.$$

На наклонных участках $1-2$ ($4\text{ В} < U < 8\text{ В}$) и $3-4$ оба диода закрыты: D_2 — потому что $U < U_{02}$, а D_1 отключён ключом K_1 (иначе он не дал бы напряжению подняться выше 4 В).

2. Наклонные участки — закон Ома. Продолжим прямые $1-2$ и $3-4$ к началу координат (рис. 8): обе проходят через точку $(0;\,0)$. Значит, на каждой из них $I = U/R$ с постоянным R — ток идёт только через резисторы:

$$1-2:\ R_{12} = \frac{U_2}{I_2} = \frac{8\text{ В}}{2I_0},$$

$$3-4:\ R_{34} = \frac{U_3}{I_3} = \frac{8\text{ В}}{6I_0} = \frac{R_{12}}{3}.$$

Сопротивление на $3-4$ меньше — там подключено больше резисторов. На $1-2$ работает один R_1 (ключ K_2 разомкнут), на $3-4$ — R_1 и R_2 параллельно (ключ K_2 замкнут):

$$R_1 = R_{12}, \qquad \frac{R_1R_2}{R_1+R_2} = \frac{R_1}{3} \ \Rightarrow\ R_2 = \frac{R_1}{2}.$$

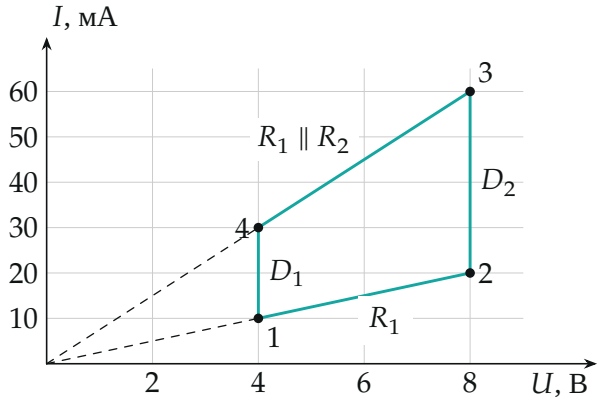


Рис. 8. Цикл в масштабе $I_0 = 10$ мА: продолжения наклонных участков (пунктир) проходят через начало координат. Подписи у участков — через что идёт ток сверх уже имеющегося.

3. Последовательность действий с ключами. Вначале (точка 1) оба ключа разомкнуты.

- $1-2$: ток растёт, весь он идёт через R_1, $U = IR_1$ растёт от 4 до 8 В.
- $2-3$: напряжение дошло до $U_{02} = 8$ В, открывается D_2; через R_1 идёт постоянный ток $2I_0$, а весь прирост тока (от $2I_0$ до $6I_0$) уходит в диод.
- В точке 3 замыкают K_2. При 8 В через R_1 и R_2 вместе идёт $8/R_1 + 8/R_2 = 2I_0 + 4I_0 = 6I_0$ — ровно весь ток, и ток через D_2 обращается в ноль. Дальше ток убывает, U падает ниже 8 В, D_2 закрыт.
- $3-4$: ток идёт через $R_1 \parallel R_2$, U падает от 8 до 4 В.
- В точке 4 ($U = 4$ В) размыкают K_2 и замыкают K_1. Через R_1 при 4 В идёт I_0, остальные $2I_0$ — через открывшийся D_1.
- $4-1$: ток убывает от $3I_0$ до I_0 при $U = U_{01} = 4$ В; ток через D_1 падает от $2I_0$ до нуля.
- В точке 1 ток через D_1 равен нулю, размыкают K_1 — цикл повторяется.

Ключ K_2 в точке 4 нужно именно разомкнуть: при замкнутом K_2 резисторы при 4 В брали бы $3I_0$, и ток $I < 3I_0$ не смог бы держать $U = 4$ В — участка $4-1$ не было бы.

4. Масштаб тока из Q_{23}. На участке 2 – 3 напряжение на R_1 постоянно, $U = 8$ В, ток через него $2I_0$; мощность $P = U_{02} \cdot 2I_0$ постоянна. Длительность участка — время, за которое полный ток вырос на $6I_0 - 2I_0 = 4I_0$ со скоростью k:

$$t_{23} = \frac{4I_0}{k}, \qquad Q_{23} = U_{02} \cdot 2I_0 \cdot \frac{4I_0}{k} = \frac{8U_{02}I_0^2}{k},$$

$$I_0 = \sqrt{\frac{kQ_{23}}{8U_{02}}} = \sqrt{\frac{10^{-3} \cdot 6{,}4}{8 \cdot 8}} = 0{,}01 \text{ А}.$$

5. Сопротивления.

$$R_1 = \frac{8 \text{ В}}{2I_0} = \frac{8}{0{,}02} = 400 \text{ Ом}, \qquad R_2 = \frac{R_1}{2} = 200 \text{ Ом}.$$

6. Время цикла. Ток меняется всё время с одной и той же по модулю скоростью k, поэтому время каждого участка — изменение тока, делённое на k (рис. 9):

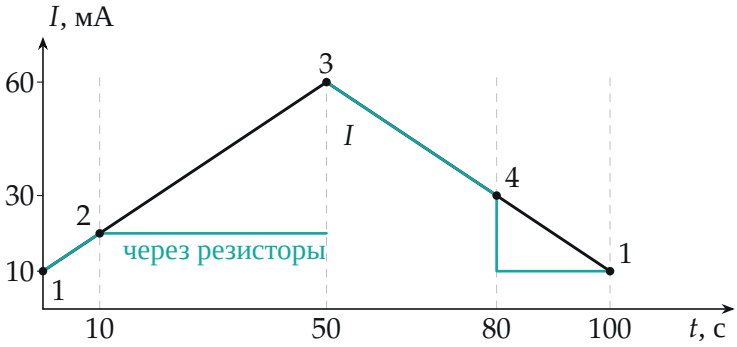


Рис. 9. Полный ток $I(t)$ (чёрная линия) и ток через резисторы (бирюзовая). Между ними — ток через открытый диод: D_2 на 10–50 с, D_1 на 80–100 с.

$$t_{12} = \frac{I_0}{k} = 10 \text{ с}, \qquad t_{23} = \frac{4I_0}{k} = 40 \text{ с},$$

$$t_{34} = \frac{3I_0}{k} = 30 \text{ с}, \qquad t_{41} = \frac{2I_0}{k} = 20 \text{ с},$$

$$\tau = \frac{(1+4+3+2)\,I_0}{k} = \frac{10 \cdot 10\ \text{мА}}{1\ \text{мА/с}} = 100\ \text{с}.$$

7. Теплота на участке $4-1$**.** Здесь K_2 разомкнут, на резисторе R_1 постоянное напряжение $U_{01} = 4$ В и ток I_0; ток диода в резисторах теплоты не выделяет:

$$Q_{41} = U_{01} I_0 t_{41} = 4 \cdot 0{,}01 \cdot 20 = 0{,}8\ \text{Дж}.$$

Обратите внимание: теплота считается только на резисторах. Ток через диод на участках $2-3$ и $4-1$ меняется, но в Q_{23} и Q_{41} не входит, поэтому мощность на резисторах на этих участках постоянна.

Проверка. Размерность: $\sqrt{kQ/U} = \sqrt{\text{А/с} \cdot \text{Дж/В}} = \sqrt{\text{А}^2}$. Второй способ для Q_{23}: $I_1^2 R_1 t_{23} = (0{,}02)^2 \cdot 400 \cdot 40 = 6{,}4$ Дж — совпало с условием. Точка 4 на прямой $R_1 \parallel R_2 = 133$ Ом: $4\ \text{В}/133\ \text{Ом} = 30\ \text{мА} = 3I_0$ — как на диаграмме.

Каждый участок цикла с постоянным U — «работа» диода, каждый наклонный — закон Ома; ключи лишь переключают, какой из них действует.

Ответ. K_1, K_2 разомкнуты на $1-2-3$; в точке 3 замыкают K_2; в точке 4 размыкают K_2 и замыкают K_1; в точке 1 размыкают K_1. 1) $U_{01} = 4$ В, $U_{02} = 8$ В; 2) $R_1 = 400$ Ом, $R_2 = 200$ Ом; 3) $\tau = 100$ с; 4) $Q_{41} = 0{,}8$ Дж.