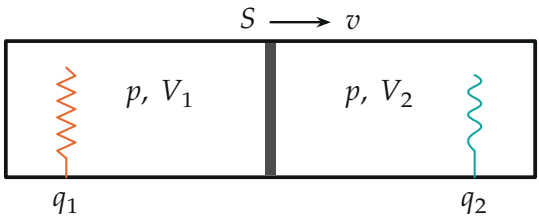
Кинематика поршня

Задача 1. [ВсОШ 2022/23, 10 класс, задача 1] «Кинематика поршня». Герметично закрытый с обоих концов теплоизолированный цилиндр расположен горизонтально. Внутри цилиндра находится непроводящий тепло легкий вертикальный поршень площадью S, делящий цилиндр на два отсека. Поршень может перемещаться внутри цилиндра без трения. Отсеки заполнены идеальным одноатомным газом при давлении p_0. В первый отсек помещён нагреватель, по которому может поступать тепло, во втором отсеке размещён теплообменник, с помощью которого тепло отводится из отсека. Модули мощностей подвода и отвода тепла равны q_1 и q_2 соответственно. Нагреватель и теплообменник приводят в действие одновременно.

В пунктах 1 и 2 считайте, что первоначальные объёмы отсеков равны.

1. Определите скорость перемещения поршня в начальный момент времени, сразу после включения нагревателя и теплообменника.
2. Определите скорость перемещения поршня в момент времени, когда поршень делит объём цилиндра в отношении 2 : 1, если модули мощностей q_1 и q_2 одинаковы и равны q.
3. Пусть в начальный момент времени поршень делит объём цилиндра в отношении 3 : 1, а во втором (меньшем) отсеке вместо теплообменника установлен нагреватель мощности q_2. Определите отношение q_2/q_1, при котором поршень останется неподвижным.

Все процессы считать равновесными.



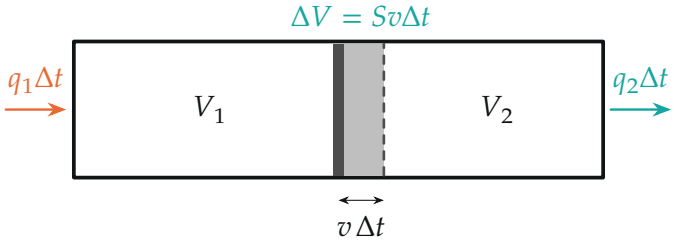
Поясняющий рисунок: слева нагреватель (мощность q_1), справа теплообменник (отводит q_2).

▲ **Решение. Что происходит.** Поршень лёгкий и без трения, поэтому давление по обе стороны всё время одинаково, p. Тепло, пришедшее в левый отсек, идёт на нагрев газа и на работу против правого газа; правый газ, наоборот, получает работу и отдаёт тепло. Класс задачи — первый закон термодинамики для двух отсеков за малое время Δt плюс уравнение Менделеева–Клапейрона, чтобы убрать температуры. Получатся два уравнения на Δp и ΔV; их сумма и разность и дают ответы.

Обозначения. V_1, V_2 — объёмы отсеков, $V_1 + V_2 = 2V_0$ в пунктах 1–2 (V_0 — начальный объём отсека); p — общее давление; ν_1, ν_2 — количества газа (не меняются); ΔV — изменение V_1 за Δt (тогда V_2 меняется на $-\Delta V$); v — скорость поршня в сторону второго отсека, $\Delta V = Sv\Delta t$.

1. Первый закон для каждого отсека. За малое время Δt первый газ получил $q_1\Delta t$, второй — $-q_2\Delta t$. Первый закон термодинамики: теплота равна изменению внутренней энергии ($\frac{3}{2}\nu R\Delta T$ для одноатомного газа) плюс работа газа ($p\Delta V$ у первого, $-p\Delta V$ у второго):

$$q_1\Delta t = \tfrac{3}{2}\nu_1 R\Delta T_1 + p\Delta V, \qquad -q_2\Delta t = \tfrac{3}{2}\nu_2 R\Delta T_2 - p\Delta V.$$



За время Δt поршень сдвигается на $v\Delta t$, объём первого отсека растёт на ΔV, второго — уменьшается на столько же.

2. Убираем температуры. Уравнение Менделеева–Клапейрона $pV_1 = \nu_1 RT_1$ для малых изменений: $\Delta(pV_1) = p\Delta V + V_1\Delta p = \nu_1 R\Delta T_1$; так же $\nu_2 R\Delta T_2 = -p\Delta V + V_2\Delta p$. Подставляем:

$$q_1\Delta t = \tfrac{3}{2}V_1\Delta p + \tfrac{5}{2}p\Delta V, \qquad -q_2\Delta t = \tfrac{3}{2}V_2\Delta p - \tfrac{5}{2}p\Delta V.$$

Сложим и вычтем (зачем: сумма даст уравнение без ΔV, разность —

главное уравнение для скорости):

$$(q_1 - q_2)\Delta t = \tfrac{3}{2}(V_1 + V_2)\Delta p, \qquad (q_1 + q_2)\Delta t = \tfrac{3}{2}(V_1 - V_2)\Delta p + 5p\Delta V. \tag{*}$$

Пункт 1. В начальный момент $p = p_0$, $V_1 = V_2 = V_0$: слагаемое с Δp во втором уравнении (*) исчезает,

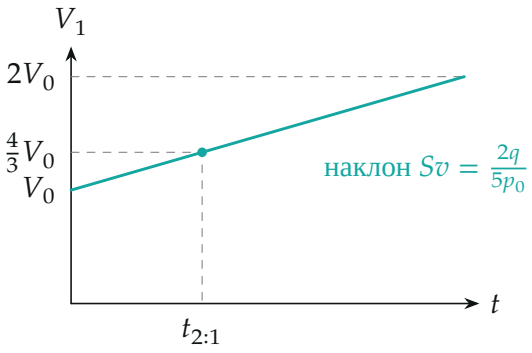
$$(q_1 + q_2)\Delta t = 5p_0 S v_0 \Delta t \quad \Rightarrow \quad v_0 = \frac{q_1 + q_2}{5p_0 S}.$$

Поршень движется ко второму отсеку при любых q_1, q_2: и нагрев слева, и охлаждение справа толкают его в одну сторону.

Пункт 2. При $q_1 = q_2 = q$ первое уравнение (*) даёт $\Delta p = 0$: давление всё время p_0. Тогда второе уравнение — без Δp при любом положении поршня:

$$2q\Delta t = 5p_0 \Delta V \quad \Rightarrow \quad v = \frac{2q}{5p_0 S} = \text{const}.$$

Скорость не зависит от положения поршня, в том числе в момент, когда объёмы относятся как 2 : 1. Физический смысл: при постоянном давлении каждый отсек — изобарный процесс, в котором на единицу объёма уходит теплота $\frac{5}{2}p_0$; оба отсека вместе меняют объём со скоростью $\frac{2q}{5p_0}$.



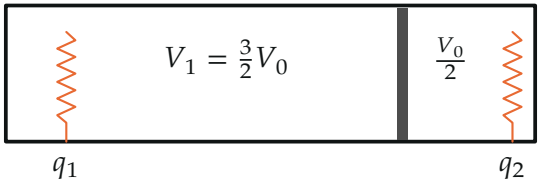
Пункт 2: объём первого отсека растёт линейно, отношение 2 : 1 *(*$V_1 = \frac{4}{3}V_0$*) — не особая точка.*

Пункт 3. Теперь во втором отсеке нагреватель: в уравнениях пишем $+q_2$ вместо $-q_2$. Поршень неподвижен, $\Delta V = 0$, оба процесса изохорные:

$$q_1\Delta t = \tfrac{3}{2}V_1\Delta p, \qquad q_2\Delta t = \tfrac{3}{2}V_2\Delta p.$$

Давление по обе стороны растёт одинаково, значит, мощности относятся как объёмы:

$$\frac{q_2}{q_1} = \frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{3}.$$



Пункт 3: нагреватели в обоих отсеках; поршень стоит, если мощности пропорциональны объёмам.

Обратите внимание: температуры газов в отсеках разные и меняются, но они не нужны — давление общее, и уравнение состояния сразу переводит $\nu R\Delta T$ в $p\Delta V + V\Delta p$.

Проверка. Размерность: $[q/(pS)] = \frac{\text{Вт}}{\text{Па}\cdot\text{м}^2} = \frac{\text{Дж/с}}{\text{Н}} = $ м/с. Пункт 3 вторым способом: при неподвижном поршне каждый газ нагревается изохорно, $\Delta p = \frac{2}{3}\frac{q\Delta t}{V}$; одинаковое Δp требует $q \propto V$. Пункт 2 вторым способом: при $p = p_0$ процесс в первом отсеке изобарный, и подведённая теплота равна $\frac{5}{2}p_0\Delta V$; из $q\Delta t = \frac{5}{2}p_0 Sv\Delta t$ сразу $v = \frac{2q}{5p_0S}$ — то же. Предел: $q_1 = q_2 = 0$ даёт $v_0 = 0$, как и должно быть.

Ответ. 1) $v_0 = \dfrac{q_1 + q_2}{5p_0S}$; 2) $v = \dfrac{2q}{5p_0S}$ (скорость постоянна); 3) $q_2/q_1 = 1/3$.