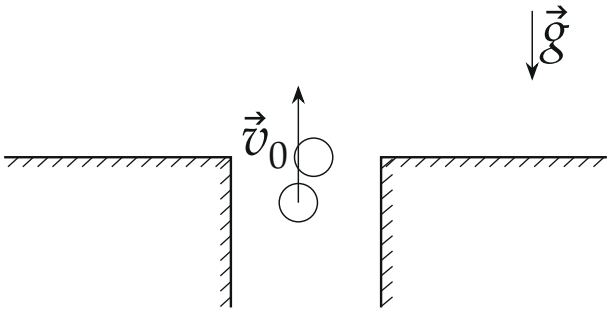
Из лунки в поле

Задача 2. [ВсОШ 2022/23, 10 класс, задача 2] «Из лунки в поле».



В поле находится лунка, из которой вылетает маленький шарик. Непосредственно перед вылетом скорость шарика равна $\vec{v}_0$ и направлена вертикально вверх. В момент вылета шарик абсолютно упруго сталкивается со вторым таким же шариком, который перед ударом покоился на уровне поверхности поля. После удара шарики движутся под действием только силы тяжести и падают где-то в поле. Удар шариков о поле абсолютно неупругий.

1. Найдите максимально возможное расстояние $l_{\max}$ между точками падения шариков.
2. Найдите максимально возможное расстояние $S_{\max}$ от лунки до места падения одного из шариков.

Поверхность поля считайте горизонтальной. Размеры лунки и шариков малы по сравнению с $l_{\max}$ и $S_{\max}$.

▲ **Решение. Что происходит.** Удар длится мгновение, поэтому сохраняются импульс и (удар упругий) кинетическая энергия двух шариков. Для одинаковых шаров это даёт известную картинку: скорости после удара перпендикулярны, а треугольник скоростей вписан в окружность с диаметром v_0. Направление разлёта зависит от того, как шарики соприкоснулись, — оно и есть свободный параметр, по которому ищем максимум. Дальше — обычный полёт тела, брошенного под углом.

Обозначения. Ось y — вертикально вверх, ось x — горизонтально. $\vec{v}_1$ — скорость вылетевшего из лунки шарика после удара, $\vec{v}_2$ — второго; θ — угол между $\vec{v}_1$ и вертикалью. v_x — модуль горизонтальной проекции скоростей, v_{y1}, v_{y2} — вертикальные проекции; l_1, l_2 — расстояния от лунки до точек падения.

1. Скорости после удара. Закон сохранения импульса и закон сохранения энергии при ударе (сила тяжести за мгновение удара импульса не меняет):

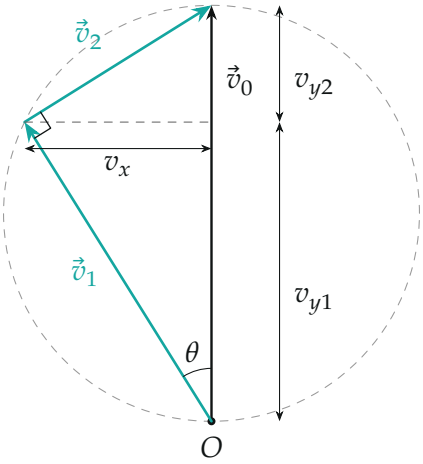
$$m\vec{v}_0 = m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2, \qquad \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2}.$$

Возведём первое равенство в квадрат: $v_0^2 = v_1^2 + v_2^2 + 2\,\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$. Сравнивая со вторым, получаем $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$: скорости перпендикулярны. Значит, $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ и $\vec{v}_0 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ образуют прямоугольный треугольник с гипотенузой v_0, и его вершина с прямым углом лежит на окружности диаметром v_0. Из треугольника

$$v_1 = v_0 \cos\theta, \quad v_2 = v_0 \sin\theta,$$

$$v_x = v_0 \sin\theta\cos\theta, \quad v_{y1} = v_0 \cos^2\theta, \quad v_{y2} = v_0 \sin^2\theta.$$

Горизонтальные проекции одинаковы по модулю и противоположны (импульс по x был нулём): шарики разлетаются в разные стороны от лунки. Вертикальные — положительны, оба шарика летят вверх, $v_{y1} + v_{y2} = v_0$.



Треугольник скоростей: $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$, вершина прямого угла на окружности с диаметром v_0.

2. Дальность полёта. Шарик вылетает с уровня поля и падает на него же. Время полёта — из уравнения для y: $t_i = 2v_{yi}/g$; за это время по горизонтали он пролетает

$$l_i = v_x t_i = \frac{2v_x v_{yi}}{g}.$$

Пункт 1. Шарики падают по разные стороны от лунки, поэтому расстояние между точками падения

$$l = l_1 + l_2 = \frac{2v_x(v_{y1} + v_{y2})}{g} = \frac{2v_0 v_x}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}.$$

Наибольшее v_x — радиус окружности, $v_0/2$, при $\theta = 45°$ (шарики разлетаются симметрично под 45° к горизонту):

$$l_{\max} = \frac{v_0^2}{g}.$$

Пункт 2. Дальше улетает шарик с большей вертикальной скоростью;

пусть это первый ($\theta < 45°$):

$$l_1 = \frac{2v_x v_{y1}}{g} = \frac{2v_0^2}{g} \sin\theta \cos^3\theta.$$

Ищем максимум $f(\theta) = \sin\theta\cos^3\theta$:

$$f'(\theta) = \cos^4\theta - 3\sin^2\theta\cos^2\theta = \cos^2\theta(\cos^2\theta - 3\sin^2\theta) = 0,$$

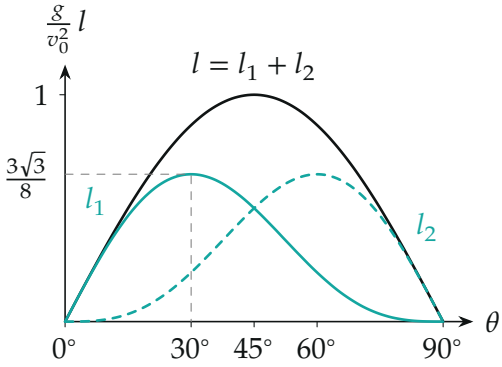
$$\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad \theta = 30°.$$

Тогда $f = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{16}$ и

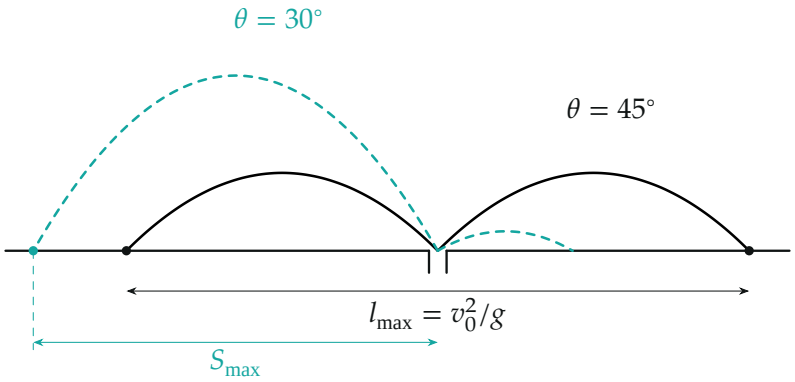
$$S_{\max} = \frac{2v_0^2}{g}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{16} = \frac{3\sqrt{3}\,v_0^2}{8g} \approx 0{,}65\,\frac{v_0^2}{g}.$$

При этом первый шарик вылетает под углом 60° к горизонту со скоростью $\frac{\sqrt{3}}{2}v_0$.

Второй способ — геометрический. Произведение $v_x v_{y1}$ — площадь прямоугольника со сторонами v_x и v_{y1}, она равна площади равнобедренного треугольника с вершиной O, боковыми сторонами $\vec{v}_1$ и его зеркальным отражением относительно вертикали и основанием $2v_x$. Этот треугольник вписан в ту же окружность радиуса $v_0/2$, а наибольшую площадь среди вписанных треугольников имеет правильный: $\frac{3\sqrt{3}}{4}\left(\frac{v_0}{2}\right)^2$. Отсюда $(v_x v_{y1})_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{16}v_0^2$ — то же.



Дальности в единицах v_0^2/g: расстояние между точками падения l (чёрная), дальности шариков l_1 и l_2 (бирюзовые). Максимум l_1 при $\theta = 30°$.



Траектории, построенные по формулам: при $\theta = 45°$ (сплошные) шарики падают на расстоянии v_0^2/g друг от друга; при $\theta = 30°$ (штрих) один шарик улетает на S_{max}.

Обратите внимание: пункты 1 и 2 максимизируют разные величины. Максимум суммы $l_1 + l_2$ — при симметричном разлёте, а максимум одной дальности — при несимметричном: выгоднее отдать одному шарику больше вертикальной скорости.

Проверка. Размерность: $[v_0^2/g]$ = м. Сравнение: $S_{\max} \approx 0{,}65\,v_0^2/g$ больше, чем у шарика при $\theta = 45°$ ($0{,}5\,v_0^2/g$), но меньше, чем v_0^2/g у тела, брошенного под 45° со всей скоростью v_0, — часть энергии уносит

второй шарик. Пределы: $\theta \to 0$ — центральный удар, первый шарик останавливается, второй летит вертикально, $l = 0$.

Ответ. 1) $l_{\max} = \dfrac{v_0^2}{g}$; 2) $S_{\max} = \dfrac{3\sqrt{3}\,v_0^2}{8g} \approx 0{,}65\,\dfrac{v_0^2}{g}$.