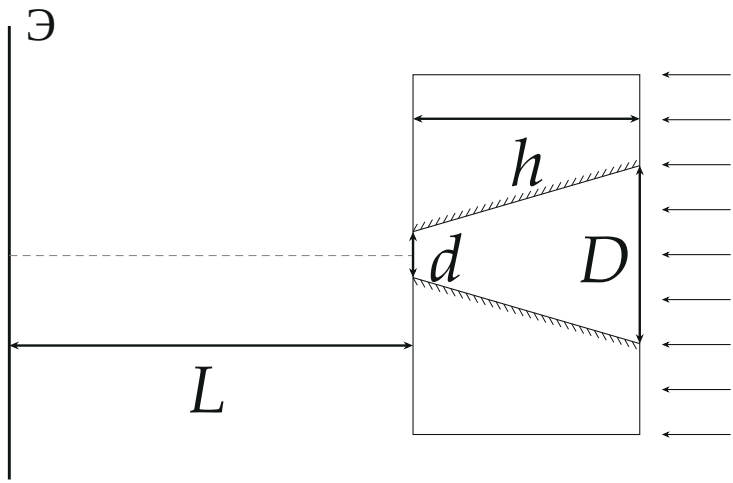
Посеребренный конус

Задача 3. [ВсОШ 2022/23, 10 класс, задача 3] «Посеребренный конус». В большой непрозрачной пластине толщиной h просверлено отверстие. Форма его боковой поверхности представляет собой усечённый конус с диаметрами оснований d и $D = 4d$. Ось конического отверстия перпендикулярна пластине, а боковая поверхность посеребрена и идеально отражает падающий на неё свет. Плоский экран расположен параллельно пластине на расстоянии L от нее (см. рис.).



Система освещается параллельным потоком света, направленным вдоль оси конуса.

Геометрические параметры h, D и L связаны соотношением: $D \ll h \ll L$.

1. Изобразите картину, наблюдаемую на экране. Укажите на рисунке все характерные геометрические размеры.

Считайте, что свет попадает на экран только через отверстие в пластине.

2. Между пластиной и экраном поместили идеальную собирающую линзу. Фокусное расстояние линзы $F = L/2$. Главная оптическая

ось линзы совпадает с осью конуса. Экран расположен в фокальной плоскости линзы. Считайте, что все лучи, вышедшие из отверстия в пластине, попадают на линзу.

Изобразите картину, наблюдаемую на экране в этом случае. Укажите на рисунке все характерные геометрические размеры.

Примечание: Не забудьте привести построения и расчеты, необходимые для определения характерных геометрических размеров, а также обоснование вида картинки, наблюдаемой на экране.

▲ **Решение. Что происходит.** Свет входит в широкое основание конуса D и выходит через узкое d. Часть лучей проходит насквозь, не касаясь стенок; остальные отражаются от посеребрённой поверхности один или два раза и выходят наклонно. Каждое отражение от образующей, наклонённой к оси на малый угол α_0, поворачивает луч на $2\alpha_0$. На далёком экране лучи с одинаковым наклоном дают кольцо радиусом «угол $\times L$». Задача сводится к тому, чтобы посчитать, какие лучи отражаются сколько раз и из какой части выходного отверстия они выходят. Луч, параллельный оси, и нормаль к конической поверхности лежат в одной плоскости с осью, поэтому достаточно рассмотреть осевое сечение.

Обозначения. α_0 — угол между образующей конуса и осью; z — расстояние от выходной плоскости (сторона d) вглубь пластины; R_1, R_2 — радиусы колец; d_1, d_2 — их ширины.

Пункт 1.

1. Угол конуса. Радиус отверстия растёт от $d/2$ до $D/2 = 2d$ на длине h:

$$\alpha_0 \approx \operatorname{tg}\alpha_0 = \frac{D-d}{2h} = \frac{3d}{2h} \ll 1,$$

так как $D \ll h$. Радиус стенки на глубине z: $r(z) = \frac{d}{2} + \alpha_0 z$.

2. Прямые лучи — пятно. Лучи, идущие на расстоянии меньше $d/2$ от оси, стенок не касаются и дают на экране круглое пятно диаметром d (луч 0 на рисунке).

3. Одно отражение. Луч, падающий на стенку на глубине z, после отражения идёт к оси под углом $2\alpha_0$ и до выходной плоскости смещается

поперёк оси на $2\alpha_0 z$. Он выходит на расстоянии от оси

$$r_{\text{вых}} = r(z) - 2\alpha_0 z = \frac{d}{2} - \alpha_0 z.$$

При z от 0 до $z_1 = d/\alpha_0 = \frac{2}{3}h$ величина $r_{\text{вых}}$ пробегает всё выходное отверстие от $+\frac{d}{2}$ до $-\frac{d}{2}$ (лучи 1 и 2). Пучок с наклоном $2\alpha_0$ и шириной d даёт на экране кольцо ширины $d_1 = d$ с радиусом средней линии

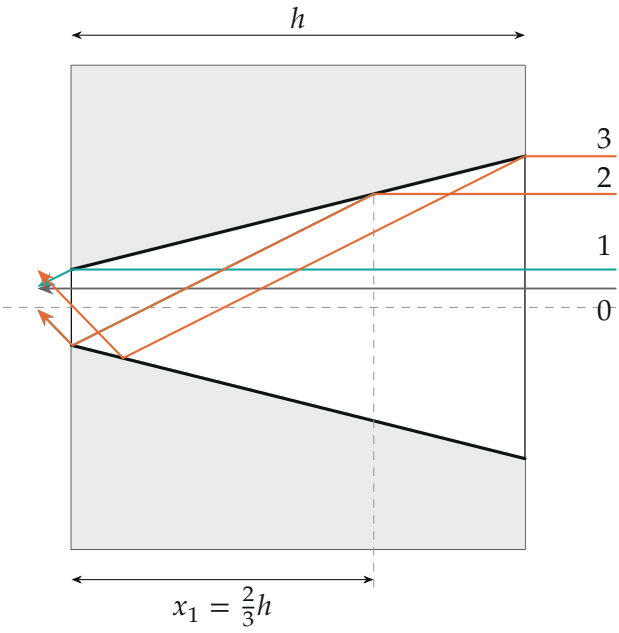
$$R_1 = L\,\mathrm{tg}\,2\alpha_0 \approx 2\alpha_0 L = \frac{3dL}{h}.$$

$R_1 \gg d$, поэтому кольцо не перекрывается с пятном.

4. Два отражения. Лучи, отражённые глубже $z_1 = \frac{2}{3}h$, попадают на противоположную стенку и отражаются второй раз; после этого наклон $4\alpha_0$. Глубина пластины h лишь в 1,5 раза больше z_1, поэтому эти лучи заполняют не всё выходное отверстие. Луч, отражённый у самого входа ($z = h$, луч 3), выходит у края отверстия; граничный луч ($z = z_1$) — у противоположного края после второго отражения у самой выходной плоскости. Расчёт хода (по той же формуле смещений) даёт выход на полосе ширины $d/2$. На экране — кольцо ширины $d_2 = \frac{d}{2}$ с внешним радиусом

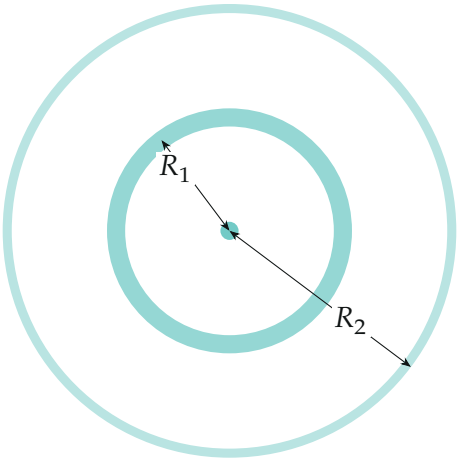
$$R_2 = L\,\mathrm{tg}\,4\alpha_0 \approx 4\alpha_0 L = \frac{6dL}{h}.$$

Трёх отражений нет: для этого нужна глубина больше $2z_1 > h$.



Осевое сечение (поперёк оси масштаб увеличен): луч 0 проходит прямо, лучи 1–2 ограничивают группу с одним отражением, лучи 2–3 — с двумя. Ход каждого луча посчитан.

Численная проверка: трассировка 40 000 лучей в осевом сечении (python, $d = 1$, $D = 4$, $h = 200$, $L = 10^5$) дала: прямые лучи — полоса шириной $1{,}000\,d$; одно отражение — от $R_1 - 0{,}500\,d$ до $R_1 + 0{,}500\,d$; два отражения — от $R_2 - 0{,}500\,d$ до R_2, где $R_n = L \operatorname{tg} 2n\alpha_0$.



Картина на экране (схема, ширины колец увеличены): пятно диаметром d, кольцо радиуса $R_1 = 3dL/h$ ширины d, кольцо с внешним радиусом $R_2 = 6dL/h$ ширины $d/2$.

Пункт 2.

5. Линза. За отверстием свет — это три параллельных пучка: вдоль оси, под углом $2\alpha_0$ и под углом $4\alpha_0$ (в каждой осевой плоскости). Идеальная линза собирает параллельный пучок в одну точку фокальной плоскости — туда, где её пересекает луч пучка, идущий через оптический центр:

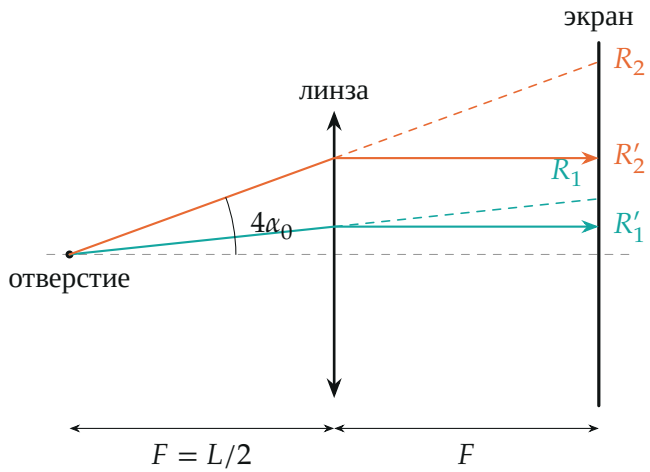
$$\rho = F \operatorname{tg} \beta.$$

Осевой пучок собирается в точку на оси. Пучки с наклоном $2\alpha_0$ и $4\alpha_0$ во всех осевых плоскостях собираются в тонкие окружности

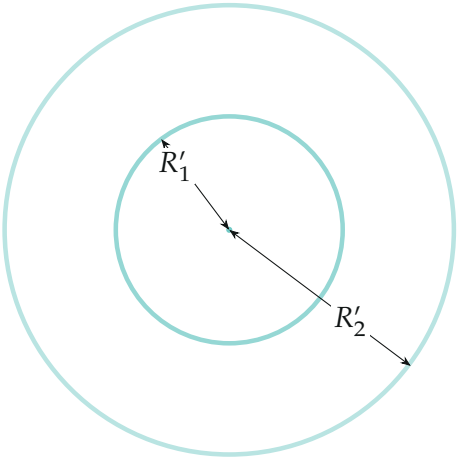
$$R_1' = F \cdot 2\alpha_0 = \frac{3dL}{2h} = \frac{R_1}{2}, \qquad R_2' = F \cdot 4\alpha_0 = \frac{3dL}{h} = \frac{R_2}{2}.$$

Толщина колец и размер центральной точки в идеальной линзе (геометрическая оптика) много меньше d.

Второй способ увидеть, что радиусы уменьшаются вдвое: $h \ll L$, $d \ll h$, поэтому все лучи выходят практически из одной точки на оси на расстоянии F от линзы, то есть из фокуса. После линзы каждый такой луч идёт параллельно оси на той высоте, на которой он пришёл на линзу, $F\beta = \frac{1}{2}L\beta$ — половина радиуса кольца без линзы.



С линзой: лучи из отверстия (оно почти в фокусе) после линзы идут параллельно оси; штрих — где они были бы без линзы.



Картина на экране с линзой: точка в центре и два тонких кольца радиусов $R_1' = \frac{3dL}{2h}$ *и* $R_2' = \frac{3dL}{h}$.

Обратите внимание: без линзы ширина колец задана шириной выходящих пучков (d и $d/2$), а с линзой — нет: линза собирает каждый параллельный пучок в точку, сколько бы он ни был широк.

Проверка. Размерности: $[dL/h] =$ м. Предел: при $D \to d$ ($\alpha_0 \to 0$) кольца сливаются с центральным пятном, отражений нет. Доли света:

прямо проходит $(d/D)^2 = 1/16$ потока, остальное — в кольца; в осевом сечении трассировка дала пропорцию $1 : 2 : 1$ по ширине для 0, 1 и 2 отражений.

Ответ. 1) центральное пятно диаметром d и два кольца: радиус средней линии первого $R_1 = \dfrac{3dL}{h}$, ширина d; внешний радиус второго $R_2 = \dfrac{6dL}{h}$, ширина $d/2$; 2) точка в центре и два тонких кольца (толщина много меньше d) радиусов $R'_1 = \dfrac{3dL}{2h}$ и $R'_2 = \dfrac{3dL}{h}$.