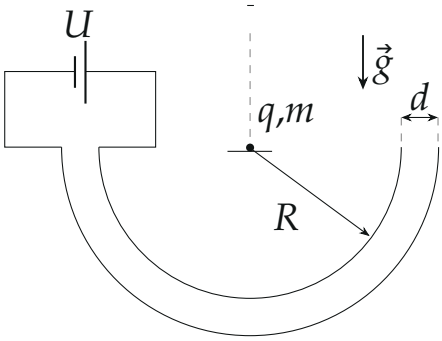
Полусферический конденсатор

Задача 4. [ВсОШ 2022/23, 10 класс, задача 4] Две металлические полусферы радиусами R и $R + d$ ($d \ll R$), плоскости оснований которых горизонтальны, а центры совпадают, подключены к источнику, напряжение U которого может изменяться. Суммарный заряд полусфер равен нулю. В центр полусфер на маленькую диэлектрическую подставку помещают точечный заряд $q > 0$ массой m, который может перемещаться по вертикальной спице без трения по направлению «вверх». Изначально напряжение на источнике равняется нулю, и его начинают медленно увеличивать. Можно пренебречь краевыми эффектами и считать, что заряды полусфер равномерно распределены по их поверхностям. Ускорение свободного падения равно g.



1. Рассмотрим вспомогательную задачу. Полусфера радиусом r заряжена равномерно с поверхностной плотностью заряда σ. В центре полусферы расположен точечный заряд q. Найдите силу взаимодействия заряда и полусферы.

Вернёмся к полусферическому конденсатору.

2. Найдите заряд Q меньшей из полусфер при напряжении на источнике равном U. Считайте, что точечный заряд q при этом остается в центре полусфер.
3. Напряжение источника медленно увеличивают. Найдите при каком заряде меньшей полусферы $Q_{\max}$ заряд q начнет перемещаться. Чему при этому будет равно напряжение источника $U_{\max}$?

4. Найдите изменение электростатической энергии системы $\Delta W_{эл}$ в процессе медленного увеличения напряжения источника от $U_0 = 0$ В до U_{max}.

Примечание: используйте приближение $(1+x)^n \approx 1 + nx$ при $nx \ll 1$.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача электростатики на принцип суперпозиции. Заряд q в центре чувствует две полусферы: внутреннюю с зарядом Q и внешнюю с зарядом $-Q$. Каждая из них давит на q вдоль вертикальной оси, но внешняя дальше, и её сила чуть меньше; разность сил порядка d/R от каждой. Пока она меньше mg, заряд лежит на подставке. Заряд Q задаёт источник: напряжение между полусферами складывается из напряжения от их собственных зарядов (как в плоском конденсаторе, зазор узкий) и напряжения от поля самого q. Энергию найдём как работу источника, потому что всё идёт медленно и заряд q не сдвигается.

Обозначения. Ось y — вертикально вверх; α — угол между осью и направлением из центра на элемент полусферы; $\mathrm{d}S$ — площадь элемента; U — потенциал внутренней полусферы минус потенциал внешней; $C = \dfrac{2\pi\varepsilon_0 R^2}{d}$ — ёмкость двух полусфер как плоского конденсатора площадью $2\pi R^2$ с зазором d.

Пункт 1.

1. Сила от одного элемента. Элемент $\mathrm{d}S$ несёт заряд $\sigma\,\mathrm{d}S$ и находится на расстоянии r от q. По закону Кулона его сила на q равна $\mathrm{d}F = \dfrac{q\sigma\,\mathrm{d}S}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ и направлена от элемента через центр (рис. 1). Полусфера симметрична относительно оси y, поэтому горизонтальные составляющие от элементов, лежащих друг напротив друга, гасятся, и остаётся только проекция на y:

$$\mathrm{d}F_y = \mathrm{d}F\cos\alpha = \frac{q\sigma}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\mathrm{d}S\cos\alpha.$$

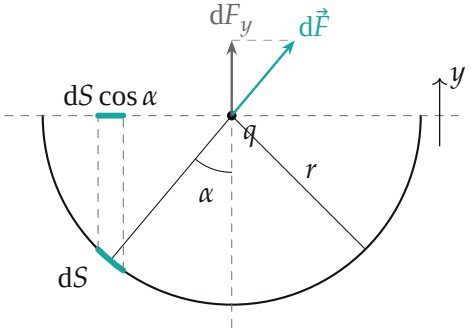


Рис. 1. Сечение полусферы плоскостью рисунка: сила от элемента $\mathrm{d}S$ *на заряд в центре и проекция элемента на основание*

2. Сумма по полусфере. Множитель $\dfrac{q\sigma}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ одинаков для всех элементов (все они на расстоянии r), а $\mathrm{d}S\cos\alpha$ — это площадь проекции элемента на плоскость основания (рис. 1). Проекции всех элементов полусферы покрывают круг основания ровно один раз, поэтому $\sum \mathrm{d}S\cos\alpha = \pi r^2$ и

$$F = \frac{q\sigma}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot\pi r^2 = \frac{q\sigma}{4\varepsilon_0}.$$

Второй способ — разрезать полусферу на кольца шириной $r\,\mathrm{d}\alpha$ и радиусом $r\sin\alpha$: $\mathrm{d}S = 2\pi r^2\sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha$, и $F = \dfrac{q\sigma}{2\varepsilon_0}\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin\alpha\cos\alpha\,\mathrm{d}\alpha = \dfrac{q\sigma}{4\varepsilon_0}$ (численно интеграл $\int \mathrm{d}S\cos\alpha/r^2$ равен $3{,}14159\ldots = \pi$). Сила не зависит от радиуса: площадь растёт как r^2, кулоновская сила убывает как $1/r^2$. Направлена она по оси, от полусферы, если знаки зарядов одинаковы.

Пункт 2.

3. Из чего состоит напряжение. Поле в зазоре — сумма поля зарядов полусфер E_Q и поля точечного заряда E_q (рис. 2). Оба направлены по радиусу. Зазор узкий, $d \ll R$, поэтому поле q в нём почти постоянно: $E_q = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$. Полусферы несут $\pm Q$ с плотностями почти $\pm\sigma = \pm\dfrac{Q}{2\pi R^2}$ и при $d \ll R$ ведут себя как плоский конденсатор: по-

ле между ними $E_Q = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} = \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R^2}$, снаружи оно почти нулевое.

Второй способ получить E_Q: достроим обе полусферы до полных сфер, нижние половины несут Q и $-Q$, верхние — ещё по Q и $-Q$ (рис. 2). Две сферы с зарядами $\pm 2Q$ дают в зазоре поле $\dfrac{2Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R^2}$, а внутри — ноль. Добавленные верхние полусферы друг друга почти гасят (их заряды противоположны, а расстояние между ними $d \ll R$), поэтому в нижнем зазоре поле то же.

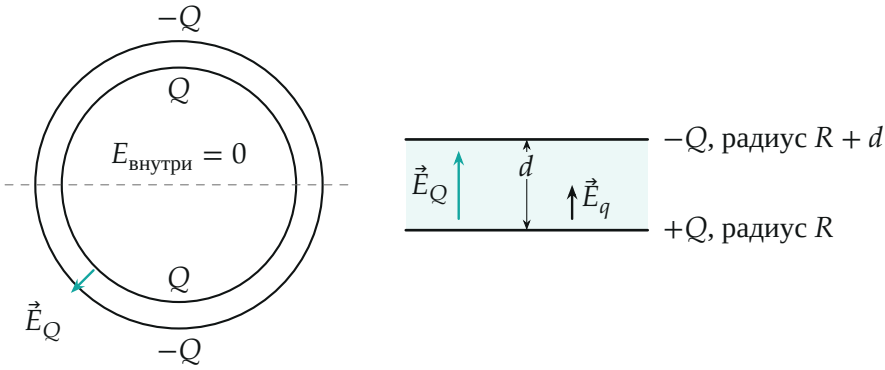


Рис. 2. Слева: полусферы, достроенные до сфер; поле в зазоре направлено от центра. Справа: участок узкого зазора крупно — в нём сумма поля зарядов полусфер E_Q и поля точечного заряда E_q, оба от центра

4. Связь Q и U. Напряжение между полусферами — интеграл поля по зазору, поле в нём почти однородно:

$$U = (E_Q + E_q)\, d = \frac{Qd}{2\pi\varepsilon_0 R^2} + \frac{qd}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{Q}{C} + \frac{q}{2C}.$$

Отсюда

$$Q = \frac{2\pi\varepsilon_0 R^2 U}{d} - \frac{q}{2}.$$

При $U = 0$ заряд внутренней полусферы равен $-q/2$: поле точечного заряда наводит на соединённых проводом полусферах заряды $\mp q/2$, которые гасят его поле в зазоре.

Пункт 3.

5. Силы, действующие на заряд q. На q действуют сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции подставки $\vec{N}$ и электрические силы полусфер (рис. 3). По пункту 1 внутренняя полусфера с плотностью $\sigma_1 = \dfrac{Q}{2\pi R^2}$ отталкивает q вверх силой $F_1 = \dfrac{q\sigma_1}{4\varepsilon_0} = \dfrac{qQ}{8\pi\varepsilon_0 R^2}$, внешняя с плотностью $\sigma_2 = -\dfrac{Q}{2\pi(R+d)^2}$ притягивает его вниз силой $F_2 = \dfrac{qQ}{8\pi\varepsilon_0(R+d)^2}$. Обе полусферы лежат ниже заряда, поэтому сила от каждой направлена по оси y. Равнодействующая электрических сил в проекции на y:

$$F_y = F_1 - F_2 = \frac{qQ}{8\pi\varepsilon_0 R^2}\left(1 - \left(1+\frac{d}{R}\right)^{-2}\right) \approx \frac{qQ}{8\pi\varepsilon_0 R^2}\cdot\frac{2d}{R} = \frac{qQd}{4\pi\varepsilon_0 R^3}.$$

Здесь использовано приближение $(1+x)^{-2} \approx 1 - 2x$ при $x = d/R \ll 1$.

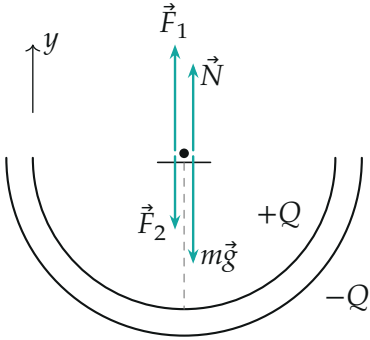


Рис. 3. Силы, действующие на заряд q, лежащий на подставке (стрелки разведены в стороны, все силы действуют вдоль оси)

6. Условие отрыва. Второй закон Ньютона для заряда в проекции на ось y, пока он лежит: $N + F_y - mg = 0$. Заряд q начинает подниматься, когда N обращается в ноль, то есть $F_y = mg$:

$$\frac{qQ_{\max}d}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = mg \quad\Rightarrow\quad Q_{\max} = \frac{4\pi\varepsilon_0 R^3 mg}{qd}.$$

Напряжение из пункта 2:

$$U_{\max} = \frac{d}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\left(Q_{\max} + \frac{q}{2}\right) = \frac{qd}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\left(1 + \frac{8\pi\varepsilon_0 R^3 mg}{q^2 d}\right).$$

Знак: $Q_{\max} > 0$, то есть внутренняя полусфера должна стать положительной — одноимённой с q; при $U = 0$ она отрицательна и прижимает заряд к подставке.

Пункт 4.

7. Закон сохранения энергии. Заряд q не двигается, напряжение растёт медленно (токи малы, тепла нет), поэтому вся работа источника идёт в электростатическую энергию: $\Delta W_{\text{эл}} = A_{\text{ист}}$. Перенося заряд $\mathrm{d}Q$ при напряжении U, источник совершает работу $U\,\mathrm{d}Q$, значит $A_{\text{ист}}$ — площадь под графиком $U(Q)$ (рис. 4). По пункту 2 $U = \dfrac{1}{C}\left(Q + \dfrac{q}{2}\right)$ — прямая, обращающаяся в ноль при $Q = -q/2$. Заряд меняется от $-q/2$ до $Q_{\max}$, площадь — треугольник:

$$\Delta W_{\text{эл}} = \frac{1}{2}U_{\max}\left(Q_{\max} + \frac{q}{2}\right) = \frac{q^2 d}{16\pi\varepsilon_0 R^2}\left(1 + \frac{8\pi\varepsilon_0 R^3 mg}{q^2 d}\right)^2.$$

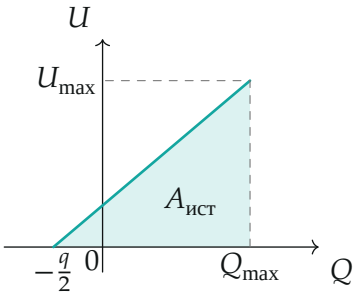


Рис. 4. Зависимость $U(Q)$ — прямая; работа источника равна площади закрашенного треугольника (построено при $Q_{max} = 1{,}5\,q$)

8. Второй способ — энергия по слагаемым. Энергия системы (без собственной энергии q, она не меняется) складывается из энергии

конденсатора $\dfrac{Q^2}{2C}$ и энергии заряда q в потенциале полусфер в центре $\dfrac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{R}-\dfrac{1}{R+d}\right)\approx\dfrac{qQd}{4\pi\varepsilon_0R^2}$:

$$W(Q)=\frac{d}{4\pi\varepsilon_0R^2}\,Q(Q+q).$$

Тогда $W(Q_{\max})-W\left(-\dfrac{q}{2}\right)=\dfrac{d}{4\pi\varepsilon_0R^2}\left(Q_{\max}^2+qQ_{\max}+\dfrac{q^2}{4}\right)=\dfrac{d}{4\pi\varepsilon_0R^2}\left(Q_{\max}+\dfrac{q}{2}\right)^2$ — то же, что и в шаге 7 (проверено символьно в python).

Обратите внимание. Заряд полусфер при $U=0$ не нулевой, а $-q/2$: начальная точка графика $U(Q)$ сдвинута, и работа источника — треугольник от $-q/2$, а не от нуля.

Проверка. Размерность: $\dfrac{q\sigma}{\varepsilon_0}$ — это $q\cdot E$, сила; $\dfrac{\varepsilon_0R^3mg}{qd}$ — $\dfrac{\varepsilon_0R^2}{d}\cdot\dfrac{mgR}{q}$, то есть ёмкость на напряжение — заряд; скобка в $U_{\max}$ безразмерна. Предел $m\to0$: $Q_{\max}\to0$, заряд отрывается, как только внутренняя полусфера перестаёт его притягивать, и $U_{\max}=\dfrac{qd}{4\pi\varepsilon_0R^2}$ — ровно напряжение, при котором $Q=0$. В том же пределе $\Delta W_{эл}=\dfrac{q^2d}{16\pi\varepsilon_0R^2}=\dfrac{(q/2)^2}{2C}$ — работа источника, который снимает наведённые заряды $\mp q/2$ с полусфер.

Ответ. 1) $F=\dfrac{q\sigma}{4\varepsilon_0}$, вдоль оси симметрии; 2) $Q=\dfrac{2\pi\varepsilon_0R^2U}{d}-\dfrac{q}{2}$; 3) $Q_{\max}=\dfrac{4\pi\varepsilon_0R^3mg}{qd}$, $U_{\max}=\dfrac{qd}{4\pi\varepsilon_0R^2}\left(1+\dfrac{8\pi\varepsilon_0R^3mg}{q^2d}\right)$; 4) $\Delta W_{эл}=\dfrac{q^2d}{16\pi\varepsilon_0R^2}\left(1+\dfrac{8\pi\varepsilon_0R^3mg}{q^2d}\right)^2$.