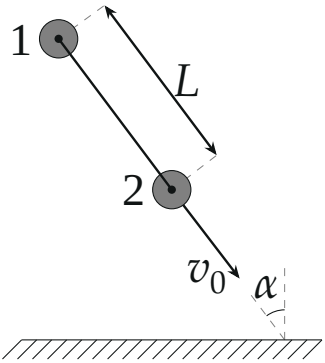
Об стену

Задача 5. [ВсОШ 2022/23, 10 класс, задача 5] На гладкой горизонтальной поверхности недалеко от вертикальной стенки расположена конструкция, состоящая из двух шайб и стержня. Шайбы лежат на плоскости «плашмя». На рисунке представлен вид сверху.



С центром шайбы 2 стержень соединен жестко и не может относительно нее вращаться. С шайбой 1 стержень соединён с помощью плотной посадки на гладкий шарнир, радиус оси которого много меньше радиуса стержня, поэтому шайба 1 может свободно вращаться относительно стержня.

Стержень образует угол $\alpha = 30°$ с нормалью к стенке. Стержень жесткий и невесомый. Длина стержня $L = 0{,}8$ м. Радиусы шайб много меньше длины стержня. Радиус стержня много меньше радиусов шайб. Шайбы одинаковые и однородные.

Конструкции сообщают скорость $v_0 = 2{,}5$ м/с, направленную вдоль стержня в сторону стенки и через некоторое время происходит соударение шайбы 2 со стенкой.

1. Покажите, что в процессе удара силы, действующие со стороны стержня на шайбы, можно считать направленными вдоль стержня.

Используйте данный факт при ответе на последующие вопросы, даже если Вы не смогли его обосновать.

2. Определите угловую скорость вращения стержня сразу после абсолютно упругого соударения шайбы 2 со стенкой (стенка гладкая).
3. Определите угловую скорость вращения стержня сразу после абсолютно неупругого соударения шайбы 2 со стенкой. Коэффициент трения между шайбой и стенкой μ. Рассмотрите два значения коэффициента трения: $\mu_1 = 0{,}2$ и $\mu_2 = 0{,}6$.

Примечание: при абсолютно неупругом соударении составляющая скорости шайбы 2, перпендикулярная стенке, обращается в ноль.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на удар твёрдого тела о стенку. Удар короткий: за время удара тела не успевают сместиться, а силы удара так велики, что все остальные силы (кроме сил стержня и стенки) не важны. Шайба 1 сидит на гладком шарнире, поэтому стержень может только толкать её вдоль себя, и её скорость поперёк стержня за удар не меняется — она остаётся нулевой. Остаются две неизвестные: скорость v_1 шайбы 1 вдоль стержня и угловая скорость ω. Их дают закон сохранения импульса вдоль стенки (стенка гладкая) и закон сохранения энергии (упругий удар), а при трении — отношение импульсов силы трения и силы нормальной реакции.

Обозначения. m — масса шайбы, r — её радиус ($r \ll L$); ось x направлена вдоль стенки, ось y — по нормали от стенки (рис. 2); $\vec{e}$ — единичный вектор вдоль стержня от шайбы 1 к шайбе 2, $\vec{e} = (\sin\alpha;\ -\cos\alpha)$; $\vec{n} = (\cos\alpha;\ \sin\alpha)$ — единичный вектор поперёк стержня; v_1 — проекция скорости шайбы 1 на $\vec{e}$ сразу после удара; ω — угловая скорость стержня; Δp_x, Δp_y — изменения импульса системы за удар.

Пункт 1.

1. Силы на тело «шайба 2 + стержень». Стержень невесом, и шайба 2 с ним — одно твёрдое тело. На него действуют (рис. 1): сила нормальной реакции стенки $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ в точке контакта K и сила $\vec{F}$ со стороны шайбы 1 на конце стержня A. Разложим $\vec{F}$ на $F_{\parallel}$ вдоль стержня и $F_{\perp}$ поперёк. Шарнир гладкий, а его ось тонкая, поэтому момент от шайбы 1 на стержень не передаётся.

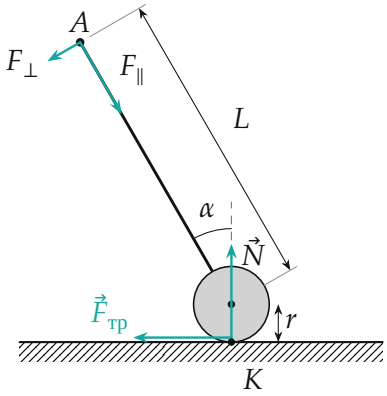


Рис. 1. Силы, действующие во время удара на тело «шайба 2 + стержень» (радиус шайбы для наглядности сильно увеличен)

2. Уравнение моментов. Запишем уравнение вращательного движения этого тела относительно центра шайбы 2 в системе отсчёта, связанной с этим центром. Сила инерции приложена к центру масс тела — центру шайбы (стержень невесом) — и момента не даёт. Сила $\vec{N}$ проходит через центр шайбы, $F_\parallel$ — тоже (вдоль стержня). Остаются момент силы трения на плече r и момент $F_\perp$ на плече L:

$$I\varepsilon = F_\perp L - F_{тр} r, \qquad I = \frac{mr^2}{2}.$$

Отсюда $F_\perp = \dfrac{F_{тр} r + I\varepsilon}{L}$. Оценим: за время удара τ угловая скорость меняется на $\omega \sim v_0/L$, так что $I\varepsilon \sim \dfrac{mr^2 v_0}{L\tau}$; сила трения не больше $N \sim \dfrac{mv_0}{\tau}$. Тогда

$$F_\perp \sim \frac{r}{L} \cdot \frac{mv_0}{\tau}\left(\mu + \frac{r}{L}\right) \ll \frac{mv_0}{\tau} \sim N.$$

Импульс силы $F_\perp$ за удар в L/r раз меньше остальных, и его можно не учитывать. Стержень невесом, поэтому сумма сил на него равна нулю: шайба 2 действует на стержень силой $-\vec{F}$, и обе силы со стороны стержня на шайбы направлены вдоль стержня.

3. Следствие. Шайба 1 получает за удар импульс только вдоль $\vec{e}$, поэтому её скорость поперёк стержня не меняется и остаётся нулевой: после удара шайба 1 движется вдоль стержня со скоростью $v_1\vec{e}$. Стержень жёсткий, поэтому проекции скоростей его концов на сам стержень равны: скорость шайбы 2

$$\vec{u}_2 = v_1\vec{e} + \omega L\,\vec{n}.$$

Пункт 2.

4. Закон сохранения импульса вдоль стенки. Стенка гладкая, её сила направлена по y, поэтому проекция импульса системы на ось x за удар сохраняется. До удара обе шайбы движутся со скоростью $v_0\vec{e}$, после — как на рис. 2:

$$2mv_0\sin\alpha = mv_1\sin\alpha + m\left(v_1\sin\alpha + \omega L\cos\alpha\right) \quad\Rightarrow\quad v_1 = v_0 - \frac{\omega L}{2\operatorname{tg}\alpha}.$$

5. Закон сохранения механической энергии (удар упругий, вращением шайб пренебрегаем, так как $r \ll L$). Векторы $\vec{e}$ и $\vec{n}$ перпендикулярны, поэтому $u_2^2 = v_1^2 + \omega^2L^2$:

$$\frac{2mv_0^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{m\left(v_1^2 + \omega^2L^2\right)}{2} \quad\Rightarrow\quad v_1^2 = v_0^2 - \frac{\omega^2L^2}{2}.$$

6. Решаем. Подставим v_1 из шага 4: $v_0^2 - \dfrac{v_0\omega L}{\operatorname{tg}\alpha} + \dfrac{\omega^2L^2}{4\operatorname{tg}^2\alpha} = v_0^2 - \dfrac{\omega^2L^2}{2}$. Корень $\omega = 0$ — это движение без удара; второй корень

$$\omega = \frac{4v_0\operatorname{tg}\alpha}{L\left(1 + 2\operatorname{tg}^2\alpha\right)} = \frac{4\cdot 2{,}5\cdot 0{,}577}{0{,}8\cdot(1+2/3)}\ \text{рад/с} \approx 4{,}33\ \text{рад/с}.$$

Тогда $v_1 = 2{,}5 - \dfrac{4{,}33\cdot 0{,}8}{2\cdot 0{,}577} = -0{,}5$ м/с: шайба 1 после удара откатывается вдоль стержня от стенки, а шайба 2 уходит от стенки со скоростью $u_2 \approx 3{,}5$ м/с (рис. 2). Численное решение системы (python) даёт те же два корня.

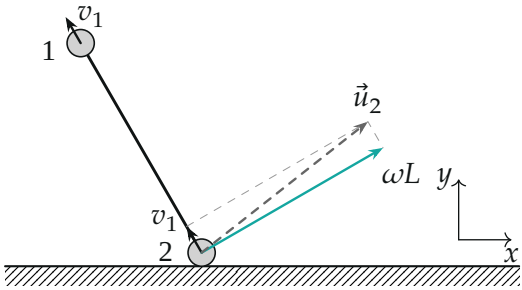


Рис. 2. Скорости сразу после упругого удара (в масштабе): $v_1 = -0{,}5$ м/с (против $\vec{e}$), у шайбы 2 к той же составляющей вдоль стержня добавляется $\omega L \approx 3{,}46$ м/с поперёк него

Пункт 3.

7. Кинематика после неупругого удара. Составляющая скорости шайбы 2 по y обращается в ноль, и она движется вдоль стенки со скоростью $v_2 \geq 0$ (трение не может развернуть её). Разложим v_2 на составляющие вдоль стержня $v_2 \sin\alpha$ и поперёк $v_2 \cos\alpha$ (рис. 3). Первая равна скорости шайбы 1 (стержень жёсткий), вторая равна ωL:

$$v_1 = v_2 \sin\alpha, \qquad \omega = \frac{v_2 \cos\alpha}{L}.$$

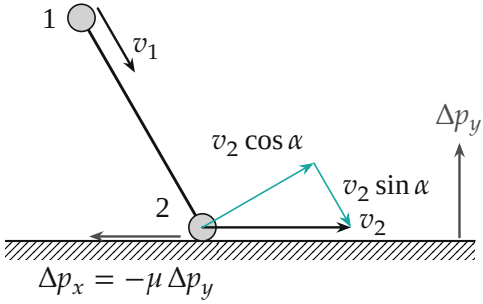


Рис. 3. Скорости сразу после неупругого удара со скольжением ($\mu_1 = 0{,}2$, в масштабе) и импульсы сил стенки: нормальной реакции и трения

8. Пусть шайба 2 скользит по стенке весь удар. Тогда в каждый момент сила трения равна μN и направлена против x, значит, отношение

импульсов сил стенки за удар $\Delta p_x = -\mu\,\Delta p_y$. Импульсы системы до и после удара (рис. 3):

$$\Delta p_x = mv_2 + mv_1 \sin\alpha - 2mv_0 \sin\alpha = mv_2\left(1+\sin^2\alpha\right) - 2mv_0\sin\alpha,$$

$$\Delta p_y = -mv_1\cos\alpha + 2mv_0\cos\alpha = 2mv_0\cos\alpha - mv_2\sin\alpha\cos\alpha.$$

Из $\Delta p_x = -\mu\,\Delta p_y$:

$$v_2 = \frac{2v_0(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{1+\sin^2\alpha - \mu\sin\alpha\cos\alpha},$$

$$\omega = \frac{v_2\cos\alpha}{L} = \frac{2v_0(\operatorname{tg}\alpha - \mu)}{L\left(1+2\operatorname{tg}^2\alpha - \mu\operatorname{tg}\alpha\right)}.$$

(Знаменатель приведён делением на $\cos^2\alpha$: $\dfrac{1+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = 1+2\operatorname{tg}^2\alpha$.) Ответ имеет смысл, только если $v_2 \geq 0$, то есть $\mu \leq \operatorname{tg}\alpha \approx 0{,}577$.

9. $\mu_1 = 0{,}2 < \operatorname{tg}\alpha$**.** Скольжение действительно не прекращается: $v_2 \approx 1{,}40$ м/с > 0, $v_1 \approx 0{,}70$ м/с, $\Delta p_y > 0$, и

$$\omega_1 = \frac{2\cdot 2{,}5\cdot(0{,}577 - 0{,}2)}{0{,}8\cdot(1+0{,}667-0{,}115)}\ \text{рад/с} \approx 1{,}52\ \text{рад/с}.$$

10. $\mu_2 = 0{,}6 > \operatorname{tg}\alpha$**.** Формула шага 8 дала бы $v_2 < 0$ (python: $v_2 \approx -0{,}10$ м/с): трение будто бы развернуло шайбу, чего быть не может — оно только тормозит скольжение. Значит, скольжение прекращается во время удара, и после удара $v_2 = 0$. Проверим, что такой исход возможен: при $v_2 = 0$ по шагу 7 $v_1 = 0$ и $\omega = 0$, система останавливается целиком, и за удар $\Delta\vec{p} = -2mv_0\vec{e}$, то есть $|\Delta p_x|/\Delta p_y = \operatorname{tg}\alpha \approx 0{,}58$. Сила трения покоя может составлять любую долю N до $\mu_2 = 0{,}6$, так что отношение 0,58 ей доступно. Итак, $\omega_2 = 0$.

Для $\mu_1 = 0{,}2$ остановка была бы невозможна: она требует отношения $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}58$, а трение даёт не больше 0,2. Поэтому исходы двух случаев однозначны. Зависимость $\omega(\mu)$ — на рис. 4.

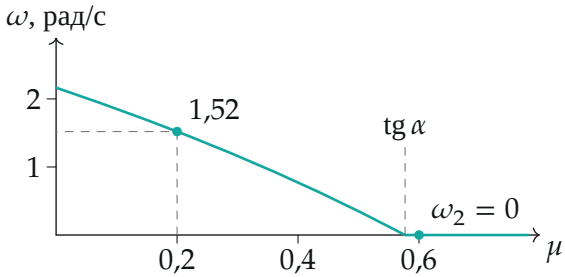


Рис. 4. Угловая скорость после неупругого удара в зависимости от коэффициента трения (по формуле шага 8 при $\mu \le \operatorname{tg}\alpha$, дальше ноль)

Обратите внимание. Импульс шайбы 1 поперёк стержня за удар не меняется — это и есть смысл пункта 1; без него неизвестных больше, чем уравнений. Формула для скольжения при $\mu > \operatorname{tg}\alpha$ даёт отрицательную v_2, и её нельзя подставлять: скольжение кончилось внутри удара.

Проверка. Размерность: v_0/L — рад/с. Предел $\alpha \to 0$ (удар по нормали): $\omega \to 0$ в обоих пунктах, стержень не закручивается. При $\mu = 0$ неупругий удар даёт $\omega = \dfrac{2v_0 \operatorname{tg}\alpha}{L(1+2\operatorname{tg}^2\alpha)} \approx 2{,}17$ рад/с — ровно половину упругого: импульс нормальной реакции при неупругом ударе вдвое меньше, а закручивает стержень именно он. Второй способ для пункта 2 — уравнение моментов относительно центра масс (середины стержня) плюс теорема Кёнига — даёт ту же формулу.

Ответ. 1) момент силы трения на плече r и вращение шайбы 2 дают силе $F_\perp$ величину порядка $(r/L)\,N$, ею можно пренебречь; 2) $\omega = 4v_0 \operatorname{tg}\alpha/(L(1+2\operatorname{tg}^2\alpha)) \approx 4{,}33$ рад/с; 3) при $\mu_1 = 0{,}2 < \operatorname{tg}\alpha$: $\omega_1 = 2v_0(\operatorname{tg}\alpha - \mu_1)/(L(1+2\operatorname{tg}^2\alpha - \mu_1 \operatorname{tg}\alpha)) \approx 1{,}52$ рад/с; при $\mu_2 = 0{,}6 > \operatorname{tg}\alpha$: $\omega_2 = 0$.