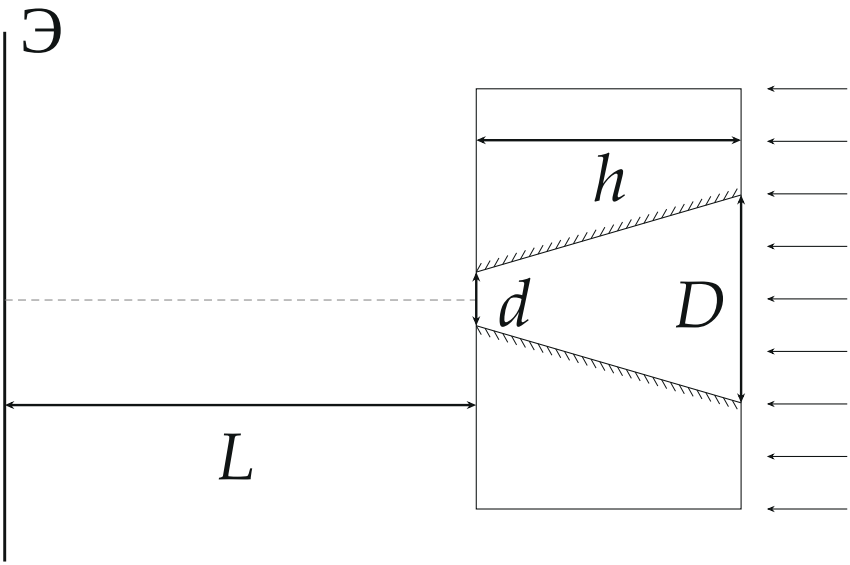
Щель Кассини

Задача 1. [ВсОШ 2022/23, 11 класс, задача 1] В непрозрачном плоском слое толщиной h просверлено отверстие, форма боковой поверхности которого представляет собой усечённый конус с диаметрами оснований d и D, ось которого перпендикулярна плоским поверхностям слоя. Боковая поверхность конуса посеребрена и идеально отражает падающий на неё свет. За слоем на расстоянии L от ближайшей к нему плоской поверхности слоя находится плоский экран.



Система освещается параллельным потоком света, направленным вдоль оси конуса.

Геометрические параметры h, d, D и L связаны соотношениями: $D \ll h \ll L$, $D = 4d$.

1. Изобразите картину, наблюдаемую на экране. На рисунке укажите все характерные геометрические размеры.
2. Как изменится картина из пункта 1, если между слоем и экраном поместить тонкую собирающую линзу? Фокусное расстояние линзы $F = L/2$, главная оптическая ось линзы совпадает с осью конуса, экран расположен в фокальной плоскости линзы.

Примечание: все характерные геометрические размеры должны быть выражены через d, h и L.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача геометрической оптики: параллельный пучок входит в сужающийся зеркальный канал. Стенка наклонена к оси на малый угол α, и каждое отражение поворачивает луч на 2α, так что лучи выходят веером под углами 0, 2α, 4α к оси, а на далёком экране каждому углу отвечает своя окружность. Главная идея: выяснить, какие лучи (по расстоянию ρ от оси на входе) отражаются 0, 1 или 2 раза и в каком месте выходного отверстия они выходят. Линза во втором пункте превращает направление луча в точку фокальной плоскости.

Обозначения. Ось z направим вдоль света, к экрану; ρ — расстояние от оси до луча на входе; y — расстояние от оси в плоскости рисунка (вверх положительно); n — число отражений. Угол полураствора конуса α: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{D-d}{2h} = \dfrac{3d}{2h} \ll 1$, потому что $d \ll h$; поэтому для всех углов $\operatorname{tg}\theta \approx \theta$.

Почему хватает одного сечения. Луч, параллельный оси, лежит с ней в одной плоскости, и нормаль к стенке в точке падения лежит в той же плоскости, так что отражённый луч из неё не выходит. Поэтому задача решается в осевом сечении — равнобокой трапеции (рис. 1); следим за лучами в верхней половине, нижние устроены так же.

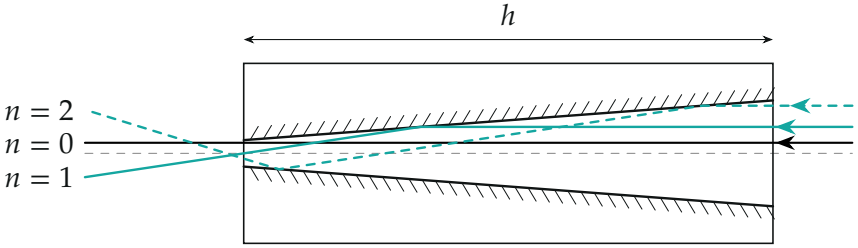


Рис. 1. Осевое сечение в масштабе: $h = 20d$, $D = 4d$. Показано по одному лучу с $n = 0, 1, 2$ отражениями; луч с одним отражением выходит под углом 2α к оси в сторону оси, с двумя — под углом 4α от оси

Пункт 1. 1. Как отражение меняет угол с осью. Параллельный оси луч встречает стенку под углом α. Угол между лучом и стенкой при от-

ражении сохраняется, поэтому отражённый луч составляет со стенкой тот же угол α, но по другую сторону, а с осью — 2α (рис. 2а). Второе отражение происходит на нижней стенке: луч, идущий под углом 2α к оси, составляет с этой стенкой угол 3α, значит, после отражения он составляет 3α с её продолжением и 4α с осью (рис. 2б). Каждое отражение добавляет 2α, а направление к оси и от оси чередуется: $\theta_1 = -2\alpha$, $\theta_2 = +4\alpha$ (угол θ от оси, вверх положительный).

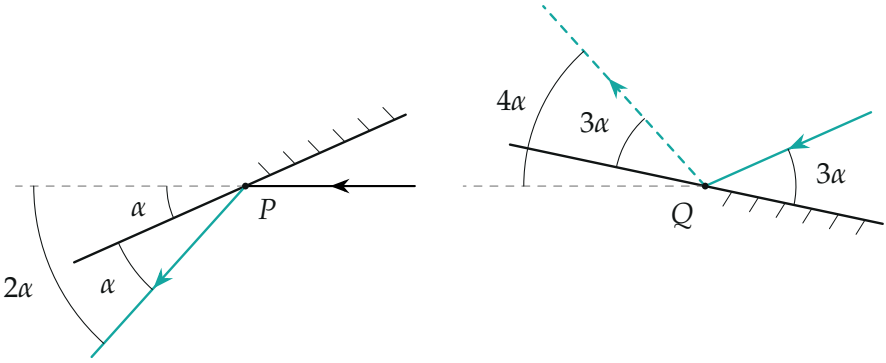


Рис. 2. Углы при отражении (для наглядности α увеличен): а) первое отражение, угол с осью становится 2α; б) второе отражение, угол с осью становится 4α

2. Куда попадает луч с расстоянием ρ. Стенки задаются уравнениями $y = \pm(D/2 - \alpha z)$, отверстие на выходе ($z = h$) — это $|y| < d/2$; мы помним, что $2\alpha h = D - d$. Рассмотрим три случая (рис. 3).

а) $\rho < d/2$. Луч целиком проходит через выходное отверстие, не касаясь стенок: $n = 0$, $\theta = 0$.

б) $\rho > d/2$. Луч встречает верхнюю стенку в точке z_1, где $\rho = D/2 - \alpha z_1$, то есть $2\alpha z_1 = D - 2\rho$. Дальше он идёт под углом -2α: $y(z) = \rho - 2\alpha(z - z_1)$. При $z = h$ получаем координату выхода

$$y_E = \rho - 2\alpha h + 2\alpha z_1 = \rho - (D - d) + (D - 2\rho) = d - \rho.$$

Если $y_E > -d/2$, то есть $\rho < 3d/2$, луч проходит в отверстие после одного отражения: $n = 1$, $\theta_1 = -2\alpha$. Выходные точки y_E заполняют всё отверстие от $-d/2$ до $d/2$.

в) $3d/2 < \rho < D/2 = 2d$. Луч после первого отражения идёт ниже отверстия и встречает нижнюю стенку в точке z_2: $-(D/2 - \alpha z_2) = \rho - 2\alpha(z_2 - z_1)$, откуда $3\alpha z_2 = \rho + D/2 + 2\alpha z_1$, то есть $\alpha z_2 = D/2 - \rho/3$. После второго отражения угол равен $+4\alpha$, и на выходе

$$y_E = -\left(\frac{D}{2} - \alpha z_2\right) + 4\alpha(h - z_2) = -\frac{D}{2} + 4\alpha h - 3\alpha z_2 = \rho - 2d.$$

Так как $3d/2 < \rho \leq 2d$, имеем $-d/2 < y_E \leq 0$: луч выходит в отверстие, и все эти лучи заполняют только нижнюю половину отверстия, $y_E \in (-d/2;\, 0)$. Обратите внимание: третьего отражения не будет — луч после второго отражения идёт от нижней стенки вверх, но у выхода остаётся ниже оси, а верхняя стенка там проходит на высоте $d/2$ над осью.

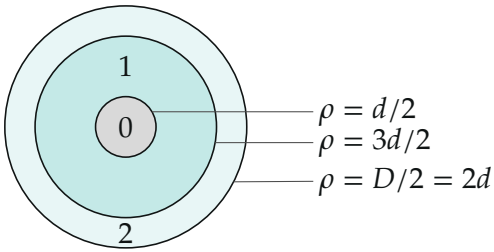


Рис. 3. Вид на входное отверстие диаметром D: зона 0 (серая), зона 1 (бирюзовая) и зона 2 (светлая) — лучи с числом отражений $n = 0, 1, 2$

3. Что видно на экране. Луч, вышедший в точке y_E под углом θ, попадает на экран на расстоянии $y_E + \theta L$ от оси. Так как $|\theta|L \geq 2\alpha L = 3dL/h \gg d \geq 2|y_E|$, положение луча определяется углом, а разброс y_E даёт ширину пятна.

- $n = 0$: пятно диаметром d в центре.
- $n = 1$: расстояние от оси до точки экрана равно $2\alpha L - y_E$, где $y_E \in (-d/2;\, d/2)$. Это кольцо шириной d с радиусом средней линии $R_1 = 2\alpha L = \dfrac{3dL}{h}$.
- $n = 2$: расстояние от оси равно $4\alpha L + (\rho - 2d)$, где $\rho - 2d \in (-d/2;\, 0)$. Это кольцо шириной $d/2$ с внешним радиусом $R_2 =$

$$4\alpha L = \frac{6dL}{h}.$$

Кольца и пятно не перекрываются: $\alpha L/d = 3L/(2h) \gg 1$ (рис. 4).

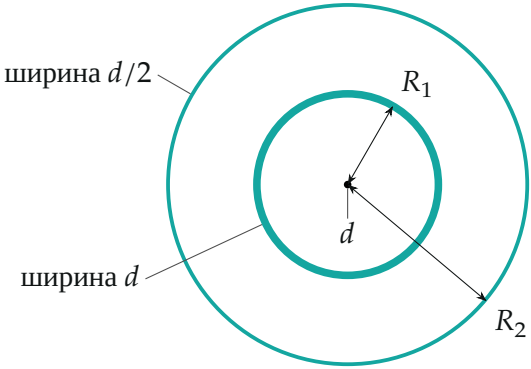


Рис. 4. Картина на экране в масштабе при $L = 4h$ и $d = 1$ мм: центральное пятно диаметром d, кольцо шириной d с радиусом средней линии $R_1 = 3dL/h$, кольцо шириной $d/2$ с внешним радиусом $R_2 = 6dL/h$

Проверка пункта 1. Размерность: dL/h — длина. Предел: если $D \to d$ (цилиндрическая шахта), то $\alpha \to 0$, кольца сжимаются в центральное пятно, как и должно быть. Баланс света: доли площади входного круга диаметром D, приходящиеся на зоны, равны

$$\frac{(d/2)^2}{(D/2)^2} = \frac{1}{16}, \qquad \frac{(3d/2)^2 - (d/2)^2}{(2d)^2} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{(2d)^2 - (3d/2)^2}{(2d)^2} = \frac{7}{16},$$

в сумме единица — весь свет, вошедший в канал, вышел через отверстие, ничего не потеряно и не повернуто назад. Центральное пятно с долей $1/16$ света на малой площади значительно ярче колец; кольца имеют равные площади, а света получают $1/2$ и $7/16$.

Пункт 2. 4. Что делает линза. Экран находится в фокальной плоскости линзы, поэтому линза собирает каждый параллельный пучок в одну точку этой плоскости — на расстоянии $F\theta$ от оси, куда придёт луч, проходящий через оптический центр линзы без преломления. Положение линзы между слоем и экраном выбирается так, чтобы экран был в её фокальной плоскости: $F = L/2$ — линза стоит посередине (рис. 5). Лучи, вышедшие под одним и тем же углом θ из разных точек отверстия,

дают одну точку: ширина колец d и $d/2$, связанная с разбросом y_E, исчезает.

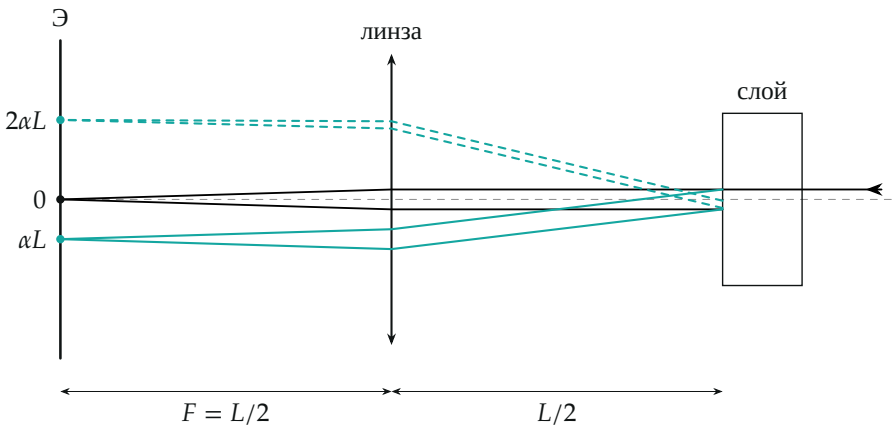


Рис. 5. Ход пучков с линзой посередине между слоем и экраном (схема, углы увеличены): три пучка с углами $\theta = 0, -2\alpha, +4\alpha$ собираются в точки фокальной плоскости на расстояниях 0, $2\alpha F = \alpha L$ и $4\alpha F = 2\alpha L$ от оси

Пучок $n = 0$ сходится в точку на оси, пучок $n = 1$ — в окружность радиуса $R'_1 = 2\alpha F = \alpha L = \dfrac{3dL}{2h}$, пучок $n = 2$ — в окружность радиуса $R'_2 = 4\alpha F = 2\alpha L = \dfrac{3dL}{h}$. Радиусы вдвое меньше прежних ($F = L/2$), а кольца стали тонкими линиями. Обратите внимание: «точка» и «окружности» — в смысле геометрической оптики; реально их размер ограничен дифракцией, а линза должна быть достаточно большой, чтобы поймать пучок $n = 2$, который на линзе удалён от оси на $2\alpha L$.

Проверка пункта 2. Без линзы луч под углом θ приходит на расстояние θL от оси, с линзой — на θF; отношение радиусов $F/L = 1/2$, как и получено. Свет собран в тонкие линии — они ярче прежних колец.

Ответ. 1) в центре пятно диаметром d; вокруг него кольцо шириной d с радиусом средней линии $R_1 = 3dL/h$ и кольцо шириной $d/2$ с внешним радиусом $R_2 = 6dL/h$; 2) пятно превращается в точку, кольца — в окружности радиусов $R'_1 = 3dL/(2h)$ и $R'_2 = 3dL/h$.