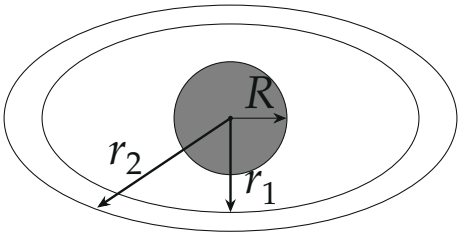
Похоже на Сатурн

Задача 2. [ВсОШ 2022/23, 11 класс, задача 2]



По поверхности тонкого плоского непроводящего кольца с внутренним и внешним радиусами r_1 и r_2 соответственно распределён положительный заряд с постоянной поверхностной плотностью σ. Центр непроводящего шара радиусом $R \ll r_1, r_2$ совпадает с центром кольца. Шар равномерно заряжен по объёму положительным зарядом Q.

Примечание: Ответы на каждый из вопросов задачи должны быть упрощены с учётом приближения $R \ll r_1, r_2$.

1. В каких пределах изменяется модуль электрического поля на поверхности шара?
2. При каких значениях σ вектор напряжённости результирующего поля в точках на поверхности шара, удалённых от плоскости кольца на расстояние большее, чем $0{,}1\,R$, можно считать направленным вдоль оси вращения системы? Заряд Q считайте известным.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Это суперпозиция полей: поле шара на его поверхности радиально и одинаково по модулю, а поле кольца в области размером $R \ll r_1$ около центра слабое, но неоднородное. В центре кольца поле равно нулю (силы от противоположных сторон кольца компенсируются), поэтому вблизи центра оно линейно по координатам. Главная идея: найти эти линейные добавки — продольную $E_z \propto z$ и поперечную $E_r \propto r$ — и сложить с полем шара на сфере. Продольная добавка находится на оси из закона Кулона, поперечная — из теоремы Гаусса для маленького цилиндра, в котором нет зарядов.

Обозначения. Начало координат — общий центр, ось z перпендикулярна плоскости кольца, r — расстояние от оси. Поле шара на поверхности $E_ш = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$ направлено по радиусу. Точка M на поверхности шара задаётся углом α между плоскостью кольца и радиус-вектором: $r = R\cos\alpha$, $z = R\sin\alpha$ (рис. 1). Обозначим

$$a = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

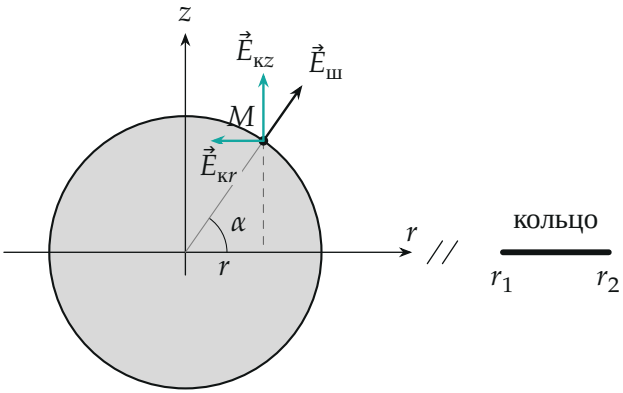


Рис. 1. Точка M на поверхности шара и три поля в ней: радиальное поле шара $\vec{E}_ш$, продольная $\vec{E}_{кz}$ и поперечная $\vec{E}_{кr}$ составляющие поля кольца (не в масштабе: $R \ll r_1$; $\vec{E}_{кr}$ направлена к оси)

Пункт 1. 1. Поле кольца на оси. Разобьём кольцо на тонкие окружности радиуса r' и шириной dr' с зарядом $dq = 2\pi r'\sigma\, dr'$. Поле окружности на её оси на высоте z направлено вдоль оси (поперечные составляющие компенсируются) и равно

$$dE_z = \frac{z\, dq}{4\pi\varepsilon_0\,(r'^2 + z^2)^{3/2}} \approx \frac{z\, dq}{4\pi\varepsilon_0 r'^3},$$

потому что $z \leq R \ll r'$. Складывая окружности от r_1 до r_2:

$$E_z = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr'}{r'^2} = az. \qquad (1)$$

Знак: над плоскостью поле направлено вверх, под ней вниз, то есть от плоскости — кольцо положительно заряжено. Вблизи оси E_z почти не зависит от r: все слагаемые поля имеют одно направление, а расстояния до зарядов кольца при малом смещении от оси меняются мало.

2. Поперечная составляющая — теорема Гаусса. Рассмотрим соосный с кольцом цилиндр радиусом r и высотой $2h$, симметричный относительно плоскости кольца; внутри него зарядов нет (рис. 2), $r, h \ll r_1$. Поток через основания даёт (1) в точках $z = \pm h$ (вверху поле вверх, внизу вниз — оба потока наружу), поток через боковую поверхность — радиальная составляющая E_r, почти не зависящая от z вблизи плоскости кольца:

$$2 \cdot \pi r^2 \cdot ah + 2\pi r \cdot 2h \cdot E_r = 0 \quad \Rightarrow \quad E_r = -\frac{a\,r}{2}. \qquad (2)$$

Минус означает, что поперечная составляющая направлена к оси. Физически: поле расходится от плоскости кольца вдоль оси, значит, линии поля втягиваются к оси в самой плоскости — в целом картина «седловая» (рис. 3).

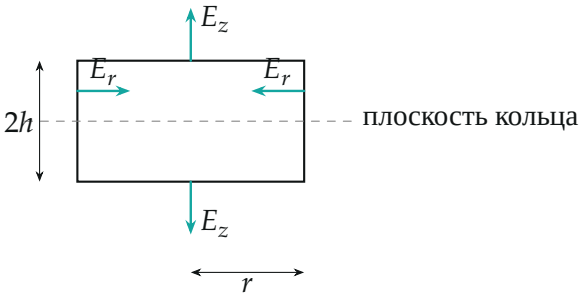


Рис. 2. Цилиндр для теоремы Гаусса: потоки через основания (продольная составляющая E_z, наружу) и через боковую поверхность (поперечная составляющая E_r, внутрь)

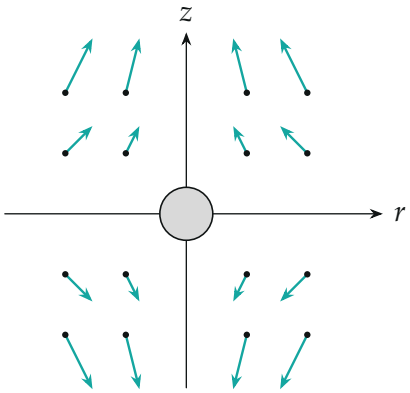


Рис. 3. Поле кольца вблизи центра, осевое сечение: $E_z = az$ от плоскости кольца, $E_r = -ar/2$ к оси (стрелки в масштабе друг друга; кольцо далеко за пределами рисунка)

Второй способ получить (2): в области без зарядов $\operatorname{div}\vec{E} = 0$, то есть $\dfrac{\partial E_z}{\partial z} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial (rE_r)}{\partial r} = 0$. С $E_z = az$ это даёт $a + \dfrac{1}{r}\dfrac{d(rE_r)}{dr} = 0$, откуда $E_r = -\dfrac{ar}{2}$. Совпало.

3. Складываем с полем шара на сфере. Поле шара в точке M имеет составляющие $E_{\text{ш}}\cos\alpha$ вдоль r и $E_{\text{ш}}\sin\alpha$ вдоль z. Подставляем $r = R\cos\alpha$, $z = R\sin\alpha$ в (1) и (2):

$$E_z = (E_{\text{ш}} + aR)\sin\alpha \equiv A\sin\alpha, \qquad E_r = \left(E_{\text{ш}} - \frac{aR}{2}\right)\cos\alpha \equiv B\cos\alpha.$$

Модуль поля

$$E^2 = A^2\sin^2\alpha + B^2\cos^2\alpha = B^2 + (A^2 - B^2)\sin^2\alpha.$$

Здесь $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B) = \dfrac{3aR}{2}\left(2E_{\text{ш}} + \dfrac{aR}{2}\right) > 0$, значит, E монотонно растёт с α: наименьшее значение — в плоскости кольца ($\alpha = 0$, $E = |B|$), наибольшее — на оси ($\alpha = 90°$, $E = A$) (рис. 4 и рис. 5а: у плоскости кольца стрелки короче, у полюсов — длиннее).

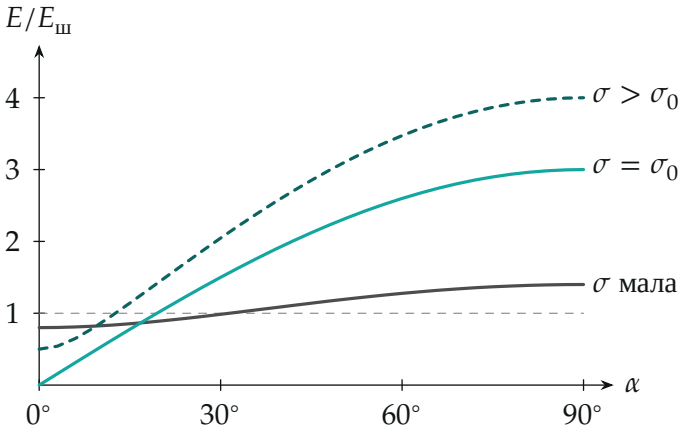


Рис. 4. Модуль поля на сфере как функция α при трёх значениях σ (в единицах $E_ш$; кривые построены по формуле $E = \sqrt{A^2 \sin^2\alpha + B^2\cos^2\alpha}$ для $aR/E_ш = 0{,}4;\ 2;\ 3$). Пунктир — поле шара без кольца

Подставляя a:

$$\left|\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} - \frac{\sigma R}{4\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\right| \le E \le \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} + \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Обратите внимание: слева стоит модуль, потому что при большом σ величина B может быть отрицательной — тогда у плоскости кольца поперечная составляющая поля кольца превосходит поле шара.

Пункт 2. Поле направлено вдоль оси, когда поперечная составляющая равна нулю: $E_r = B\cos\alpha = 0$ при любом α, то есть $B = 0$: поле кольца к оси в точности гасит радиальное поле шара.

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{\sigma R}{4\varepsilon_0}\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \quad \Rightarrow \quad \sigma_0 = \frac{Q\, r_1 r_2}{\pi R^3 (r_2 - r_1)}.$$

Тогда на всей сфере $\vec{E} = A\sin\alpha\,\vec{e}_z$ с $A = 3E_ш$ (рис. 4, кривая σ_0, и рис. 5б): все стрелки вертикальны, а на экваторе сферы поле обращается в ноль.

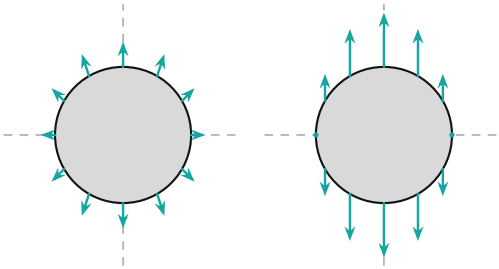


Рис. 5. Поле на поверхности шара в осевом сечении (стрелки в масштабе по формулам $E_r = B\cos\alpha$, $E_z = A\sin\alpha$; горизонтальный пунктир — плоскость кольца): а) $aR = 0{,}4E_ш$ — поле почти радиальное, на экваторе слабее, у полюсов сильнее; б) $\sigma = \sigma_0$ — поперечная составляющая исчезла, поле всюду параллельно оси

Обратите внимание: условие «больше $0{,}1R$ от плоскости кольца» нужно потому, что при $\alpha \to 0$ продольная составляющая $A\sin\alpha$ стремится к нулю, и малые поправки, которыми мы пренебрегли (порядка $(R/r_1)^2$ от поля шара), уже не малы по сравнению с ней. При $\sin\alpha > 0{,}1$ имеем $E_z > 0{,}3E_ш$, и эти поправки пренебрежимо малы. Отношение составляющих $E_r/E_z = (B/A)\operatorname{ctg}\alpha$ при $\operatorname{ctg}\alpha < 10$ мало, только если $|B| \ll A/10$, то есть только вблизи σ_0: допустимы лишь малые отклонения от σ_0 (порядка нескольких процентов).

Проверка. Размерность: $\sigma R/(\varepsilon_0 r)$ — это σ/ε_0, то есть напряжённость, как и $Q/(\varepsilon_0 R^2)$. Предел $r_2 \to \infty$ (плоскость с круглым отверстием радиуса r_1): поле на оси равно полю сплошной плоскости $\sigma/(2\varepsilon_0)$ минус поле диска радиуса r_1, то есть $\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\dfrac{z}{\sqrt{z^2+r_1^2}} \approx \dfrac{\sigma z}{2\varepsilon_0 r_1}$ — это (1) при $r_2 \to \infty$. Численный расчёт интегралом по кольцу при $r_1 = 10R$, $r_2 = 30R$ подтвердил (1) и (2) с точностью до 1–2 % в точках сферы при $\alpha = 0{,}3;\ 0{,}8;\ 1{,}3$.

Ответ. 1) $\left|\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} - \dfrac{\sigma R}{4\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r_1}-\dfrac{1}{r_2}\right)\right| \le E \le \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} + \dfrac{\sigma R}{2\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r_1}-\dfrac{1}{r_2}\right)$;
2) $\sigma = \dfrac{Qr_1r_2}{\pi R^3(r_2-r_1)}$.