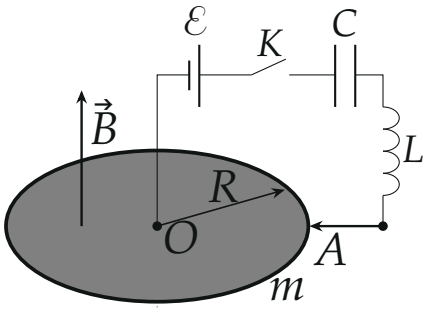
Кружатся диски

Задача 3. [ВсОШ 2022/23, 11 класс, задача 3]



На рисунке показана схема электрической цепи, состоящей из источника с электродвижущей силой $\mathcal{E}$, конденсатора ёмкостью C, катушки индуктивностью L, ключа K и металлического диска радиусом R. Диск может вращаться вокруг своей оси без трения. Диск расположен в однородном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$, направленном вдоль его оси так, как показано на рисунке. Практически вся масса m диска сосредоточена в его тонком ободе. Источник соединён с диском в его центре O, а катушка индуктивности соединена с диском с помощью неподвижного скользящего контакта A. Омическим сопротивлением контура, по которому течёт ток, и наличием у него индуктивности (дополнительно к L) можно пренебречь. Изначально ключ K разомкнут, диск неподвижен, ток в катушке отсутствует, а конденсатор не заряжен. Ключ K замыкают.

Определите максимальную угловую скорость диска $\omega_{\max}$ после замыкания ключа, а также время τ после замыкания ключа, через которое угловая скорость диска впервые достигает значения $\omega_{\max}$.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача класса «индукция → цепь → механика». Ток источника течёт через диск, на ток в магнитном поле действует сила Ампера, и диск раскручивается — он работает как двигатель. Вращающийся диск при этом сам становится источником ЭДС индукции, направленной против ЭДС источника. Значит, в цепи есть

две батарейки (источник и диск), конденсатор и катушка — колебательный контур, а скорость диска связана с зарядом конденсатора через момент силы Ампера. Главная идея: найти связь ω с зарядом q, после чего $\omega(t)$ и $q(t)$ описываются одним уравнением гармонических колебаний.

Обозначения. q — заряд конденсатора, $I = \dot{q}$ — ток в цепи, ω — угловая скорость диска. На рисунке условия длинная (положительная) пластина источника обращена к ключу, поэтому после замыкания ток идёт от + через ключ, конденсатор и катушку к контакту A и по диску — от обода к центру O. Поле $\vec{B}$ направлено вверх; если смотреть сверху (поле к нам), сила Ампера на радиальный ток к центру направлена против часовой стрелки — туда диск и раскручивается (рис. 1). Момент инерции диска (вся масса на ободе) равен mR^2. Потери нет (сопротивление нулевое), магнитное поле работы не совершает.

1. ЭДС индукции во вращающемся диске. Носители заряда на расстоянии r от оси движутся со скоростью ωr перпендикулярно радиусу, и на них действует сила Лоренца вдоль радиуса (рис. 1а). Она перераспределяет заряды, пока электрическое поле не уравновесит её, и между точками r и $r + dr$ возникает разность потенциалов $d\varphi = \omega r B\, dr$. От центра до обода

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = \omega B \int_0^R r\, dr = \frac{\omega B R^2}{2}.$$

Она направлена против ЭДС источника: двигатель, который вращается, создаёт «противо-ЭДС».

2. Момент силы Ампера и связь ω с q. Через любую окружность радиуса r с центром O течёт один и тот же ток I (весь ток идёт от обода к центру). Сила Ампера на малый элемент тока длиной dr перпендикулярна радиусу и равна $B\, dI\, dr$, её момент относительно оси $r\, B\, dI\, dr$; суммирование даёт

$$M = IB \int_0^R r\, dr = \frac{IBR^2}{2}.$$

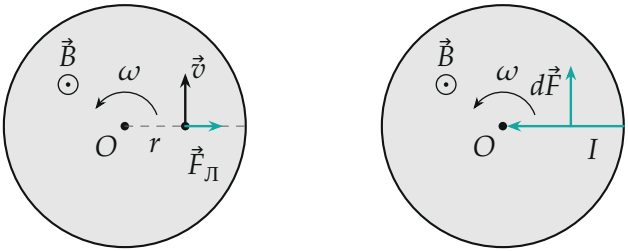
Запишем уравнение вращения диска вокруг оси: $mR^2 \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{BR^2}{2} I$.

Умножим на dt и учтём $I\,dt = dq$: $m\,d\omega = \dfrac{B}{2}\,dq$. Просуммируем от начала (когда $\omega = 0$ и $q = 0$) до произвольного момента:

$$\omega = \frac{B}{2m}\,q. \qquad (1)$$

Скорость диска пропорциональна заряду конденсатора, поэтому ω достигает максимума одновременно с q.

Второй способ, через энергию: электрическая мощность, которую цепь отдаёт диску, равна $\mathcal{E}_{\text{инд}} I = \dfrac{\omega B R^2}{2} I$ и идёт в кинетическую энергию $\dfrac{d}{dt}\dfrac{mR^2\omega^2}{2} = mR^2\omega\dot{\omega}$. Сокращая на $R^2\omega/2$, снова получаем $mR^2\dot{\omega} = BR^2 I/2$ — то же уравнение.



а) ЭДС в диске б) момент силы Ампера

Рис. 1. Диск сверху: а) сила Лоренца на носители заряда в точке на расстоянии r от оси (скорость $\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}$, $\vec{F}_Л$ — радиально наружу); б) ток от обода к центру в поле $\vec{B}$ и сила Ампера $d\vec{F}$ на его элемент — её момент раскручивает диск против часовой стрелки

3. Уравнение для q. Запишем второй закон Кирхгофа для контура (рис. 2): ЭДС источника минус ЭДС индукции равна сумме напряжений на конденсаторе и катушке (сопротивления нет):

$$\mathcal{E} - \frac{\omega B R^2}{2} = \frac{q}{C} + L\ddot{q}.$$

Подставим (1):

$$L\ddot{q} + \left(\frac{1}{C} + \frac{B^2R^2}{4m}\right)q = \mathcal{E}.$$

Это уравнение гармонических колебаний вокруг положения q_c с частотой Ω:

$$q_c = \frac{\mathcal{E}}{\dfrac{1}{C} + \dfrac{B^2R^2}{4m}} = \frac{4mC\mathcal{E}}{4m + B^2R^2C}, \qquad \Omega = \sqrt{\frac{1}{LC} + \frac{B^2R^2}{4mL}}.$$

Начальные условия $q(0) = 0$, $\dot{q}(0) = 0$ (тока в катушке нет, значит, ω тоже начинает с нуля) дают $q(t) = q_c\,(1 - \cos\Omega t)$, а по (1)

$$\omega(t) = \frac{Bq_c}{2m}\,(1 - \cos\Omega t).$$

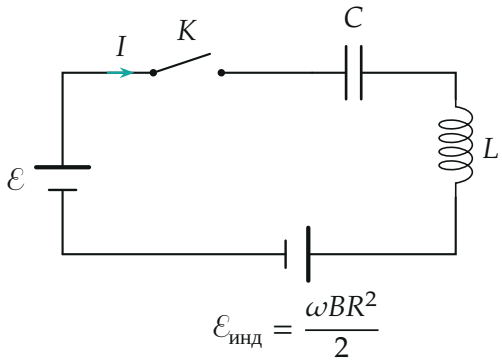


Рис. 2. Эквивалентная схема: диск — источник $\mathcal{E}_{инд}$, включённый навстречу источнику $\mathcal{E}$

4. Максимум и время. Косинус равен -1 в первый раз при $\Omega\tau = \pi$ (рис. 3). Тогда

$$\omega_{\max} = \frac{Bq_c}{m} = \frac{4BC\mathcal{E}}{4m + B^2R^2C}, \qquad \tau = \frac{\pi}{\Omega} = \frac{\pi}{\sqrt{\dfrac{1}{LC} + \dfrac{B^2R^2}{4mL}}}.$$

Обратите внимание: в момент τ ток $I = \dot{q}$ равен нулю — это условие экстремума q, а значит и ω. Скорость растёт, пока ток течёт в прежнюю сторону; потом катушка и конденсатор разворачивают ток, момент меняет знак, и диск тормозится (рис. 3).

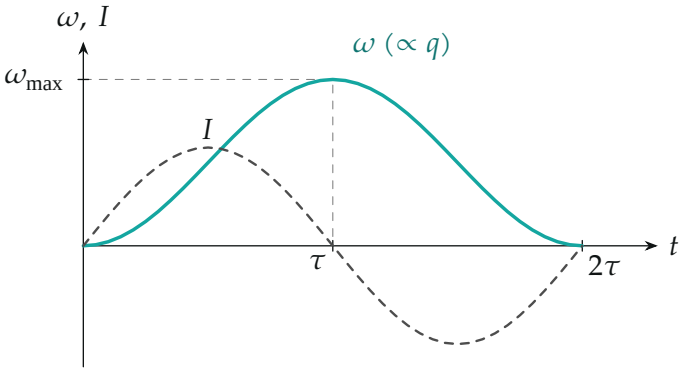


Рис. 3. Зависимость $\omega(t) = \omega_{\max}(1 - \cos\Omega t)/2$ (бирюзовая линия) и тока $I \propto \sin\Omega t$ (пунктир): максимум ω достигается при $t = \tau = \pi/\Omega$, там ток равен нулю

Проверка. Второй способ для $\omega_{\max}$ — энергия. В момент $I = 0$ энергия катушки равна нулю; работа источника $\mathcal{E}q$ идёт на энергию конденсатора и кинетическую энергию диска: $\mathcal{E}q = \dfrac{q^2}{2C} + \dfrac{mR^2\omega^2}{2}$ с $q = 2m\omega/B$. Тогда $\dfrac{2m\mathcal{E}}{B} = \omega\left(\dfrac{2m^2}{B^2C} + \dfrac{mR^2}{2}\right)$, откуда $\omega = \dfrac{4BC\mathcal{E}}{4m + B^2R^2C}$ — совпало. Предел $B \to 0$: диск не раскручивается, $\omega_{\max} \to 0$, а $\tau \to \pi\sqrt{LC}$ — половина периода LC-контура, как и должно быть. Численное интегрирование уравнений на python подтвердило $\omega_{\max}$ и τ.

Смысл. Диск — это униполярный двигатель в колебательном контуре: он работает как добавочная «ёмкость» $4m/(B^2R^2)$, включённая последовательно с C (оба слагаемых в $1/C + B^2R^2/(4m)$ складываются, как обратные ёмкости), поэтому частота выше, чем у одного LC-контура. В момент τ вся работа источника $\mathcal{E}q$ поделена между конденсатором и диском в отношении $\dfrac{1}{C} : \dfrac{B^2R^2}{4m}$. Зависимость $\omega_{\max}(B)$ немонотонна

(рис. 4): максимум $\omega_* = \dfrac{\mathcal{E}}{R}\sqrt{\dfrac{C}{m}}$ при $B_* = \dfrac{2}{R}\sqrt{\dfrac{m}{C}}$, когда энергия делится поровну.

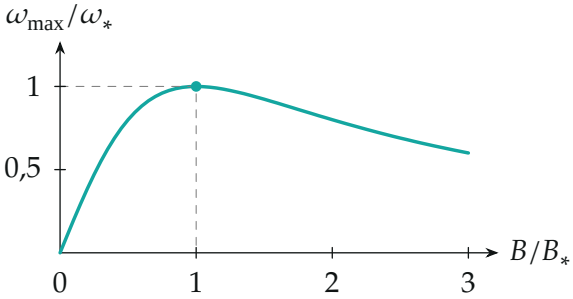


Рис. 4. Максимальная угловая скорость как функция индукции поля, $\omega_{\max}/\omega_* = 2x/(1+x^2)$, $x = B/B_*$ (построено по формуле ответа): слабое поле плохо толкает диск, сильное — даёт большую противо-ЭДС, и конденсатор заряжается меньше; лучшее поле $B_* = \dfrac{2}{R}\sqrt{\dfrac{m}{C}}$

Ответ. $\omega_{\max} = \dfrac{4BC\mathcal{E}}{4m + B^2R^2C}$; $\quad \tau = \pi\Big/\sqrt{\dfrac{1}{LC} + \dfrac{B^2R^2}{4mL}}$.