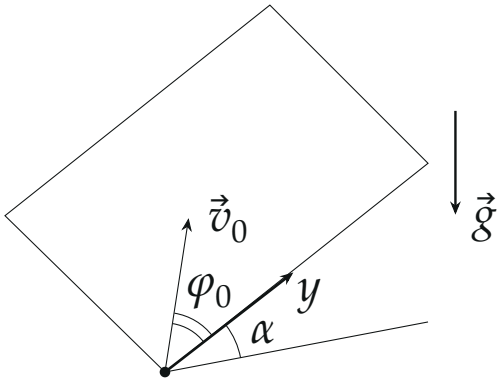
Туда-сюда

Задача 5. [ВсОШ 2022/23, 11 класс, задача 5]



На плоской доске, образующей с горизонтом угол $\alpha = 30{,}0°$, находится маленькая шайба. Коэффициент трения между шайбой и доской равен $\mu = \operatorname{tg}\alpha$. Вблизи основания доски шайбе сообщают скорость $v_0 = 8{,}00$ м/с, и она движется по доске, пока снова не достигнет основания. Основание доски горизонтально. Известно, что в моменты старта и повторного достижения основания доски вектор скорости шайбы образовывал углы $\varphi_0 = 60{,}0°$ и $\varphi_1 = 159{,}3°$ соответственно с положительным направлением оси y, направленной вверх по доске (см. рис). Ускорение свободного падения $g = 9{,}80$ м/с^2. Шайба не вращается.

Примечание: Ответ на каждый из вопросов задачи должен быть как рассчитан, так и выражен аналитически через заданные в условии величины!

1. Определите ускорения шайбы a_0 и a_1 в момент старта и прямо перед повторным достижением основания доски соответственно.
2. Определите скорости шайбы u и v_1 в верхней точке траектории и прямо перед повторным достижением основания доски соответственно.
3. Определите время t, через которое шайба повторно достигает основания доски.

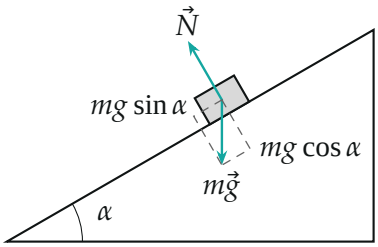
▲ **Решение. Что происходит.** Шайба скользит по плоскости доски, и в этой плоскости на неё действуют две силы: проекция силы тяжести $mg\sin\alpha$ вниз по доске и сила трения скольжения, направленная против скорости. При $\mu = \operatorname{tg}\alpha$ эти силы равны по модулю. Сумма двух равных векторов — диагональ ромба, она идёт по биссектрисе угла между ними. Отсюда главная идея: ускорение лежит на биссектрисе, поэтому проекция ускорения на скорость (изменение модуля скорости) равна проекции ускорения на ось y, и величина $v - v_y$ сохраняется на всём пути. Время найдём, проинтегрировав этот инвариант и использовав теорему об изменении кинетической энергии.

Обозначения. Ось y — вверх по доске, ось x — вдоль основания в ту сторону, куда уходит шайба; φ — угол между скоростью и осью y, так что $v_x = v\sin\varphi$, $v_y = v\cos\varphi$. Единичный вектор скорости $\vec{e} = (\sin\varphi, \cos\varphi)$.

1. Силы в плоскости доски. Перпендикулярно доске шайба не движется, поэтому $N = mg\cos\alpha$ (рис. 1а). Трение скольжения $F_{\text{тр}} = \mu N = \operatorname{tg}\alpha \cdot mg\cos\alpha = mg\sin\alpha$ — равно скатывающей силе. Второй закон Ньютона в плоскости доски, векторно:

$$m\vec{a} = -mg\sin\alpha\,\vec{e}_y - mg\sin\alpha\,\vec{e}.$$

Обратите внимание: трение направлено против скорости шайбы (а не против оси y), и его модуль постоянен, пока шайба скользит, — поэтому длины обеих стрелок на рис. 1б равны.



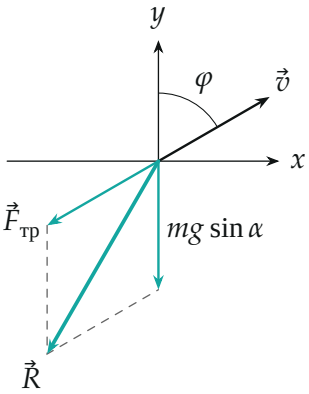


Рис. 1. а) Силы на шайбу, вид сбоку: $N = mg\cos\alpha$, $F_{тр} = \mu N = mg\sin\alpha$. б) Силы в плоскости доски при $\varphi = 60°$: проекция силы тяжести $mg\sin\alpha$ (вниз по доске) и сила трения (против скорости) равны по длине; равнодействующая $\vec{R}$ — диагональ ромба — идёт по биссектрисе угла φ между $-\vec{e}_y$ и $-\vec{e}$

Пункт 1. Ускорения. Угол между векторами $-\vec{e}_y$ и $-\vec{e}$ равен φ (углу между $\vec{e}_y$ и $\vec{e}$). Диагональ ромба со стороной $mg\sin\alpha$ и углом φ при вершине равна $2mg\sin\alpha\cos(\varphi/2)$ и делит угол пополам:

$$a = 2g\sin\alpha\cos\frac{\varphi}{2}.$$

Для двух моментов:

$$a_0 = 2g\sin\alpha\cos\frac{\varphi_0}{2} \approx 8{,}49\ \text{м/с}^2, \qquad a_1 = 2g\sin\alpha\cos\frac{\varphi_1}{2} \approx 1{,}76\ \text{м/с}^2.$$

К концу пути ускорение уменьшается: угол φ растёт, и ромб вытягивается — сила тяжести и трение почти гасят друг друга. Как вытягивается ромб — на рис. 2.

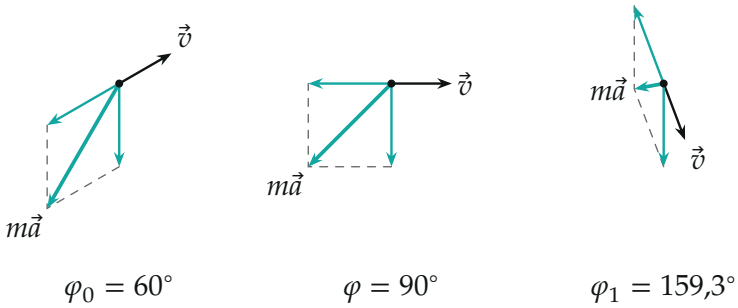


Рис. 2. Ромб сил в плоскости доски в трёх точках пути (стороны — $mg\sin\alpha$ вниз по доске и трение против скорости, длины равны; масштаб общий): при $\varphi_0 = 60°$ диагональ $m\vec{a}$ длинная, $a_0 = 8{,}49$ м/с^2; в верхней точке ромб — квадрат, $a = 2g\sin\alpha\cos 45° \approx 6{,}93$ м/с^2; у основания при $\varphi_1 = 159{,}3°$ стороны почти противоположны, $a_1 = 1{,}76$ м/с^2

Пункт 2. Скорости. Ускорение $\vec{a}$ составляет угол $\varphi/2$ и с $-\vec{e}$ (то есть с направлением торможения), и с $-\vec{e}_y$. Поэтому проекция ускорения на

скорость и проекция на ось y равны:

$$a_\tau = \dot{v} = -a\cos\frac{\varphi}{2}, \qquad a_y = \dot{v}_y = -a\cos\frac{\varphi}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(v - v_y) = 0.$$

Значит,

$$v - v_y = v(1 - \cos\varphi) = v_0(1 - \cos\varphi_0) \equiv c = 4{,}00 \text{ м/с}. \qquad (1)$$

Это верно на всём пути, пока шайба скользит. В верхней точке $v_y = 0$, $\varphi = 90°$, а скорость горизонтальна:

$$u = c = v_0(1 - \cos\varphi_0) = 4{,}00 \text{ м/с}.$$

У основания, при $\varphi = \varphi_1$:

$$v_1 = \frac{v_0(1 - \cos\varphi_0)}{1 - \cos\varphi_1} \approx \frac{4{,}00}{1 + 0{,}9356} \approx 2{,}07 \text{ м/с}.$$

Графики $v(t)$ и $v_y(t)$ (рис. 4) различаются на постоянную c в любой момент: это и есть закон (1).

Второй способ вывести (1) — через проекции на касательную и нормаль: $a_\tau = \dot{v} = -g\sin\alpha\,(1 + \cos\varphi)$, $a_n = v\dot{\varphi} = g\sin\alpha\sin\varphi$. Делим первое на второе: $\dfrac{dv}{v} = -\dfrac{d\varphi}{\operatorname{tg}(\varphi/2)}$, откуда $\ln v = -2\ln\sin(\varphi/2) + \text{const}$, то есть $v\sin^2(\varphi/2) = \text{const}$ — опять $v(1 - \cos\varphi) = \text{const}$. Совпало.

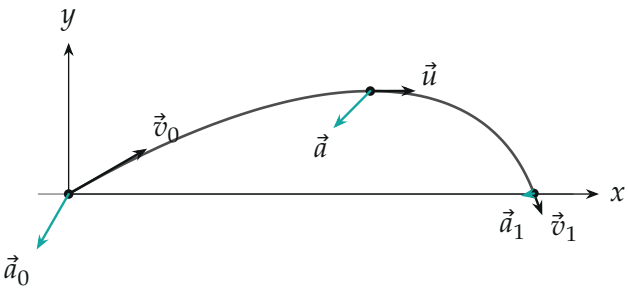


Рис. 3. Траектория шайбы в плоскости доски (вычислена численным интегрированием; масштаб по осям один) и векторы скорости (чёрные) и ускоре-

ния (бирюзовые) в трёх точках: старт ($\varphi_0 = 60°$), верхняя точка ($\varphi = 90°$, скорость $\vec{v}$ горизонтальна), возвращение к основанию ($\varphi_1 = 159{,}3°$). Длины стрелок — свои для скоростей и для ускорений

Пункт 3. Время. Проинтегрируем (1) по времени от старта до возвращения к основанию: $\int v\,dt = S$ — путь, пройденный шайбой, $\int v_y\,dt = \Delta y$ — смещение вдоль оси y, поэтому

$$S - \Delta y = c\,t.$$

К возвращению к основанию $\Delta y = 0$, откуда $S = c\,t$. Путь найдём из теоремы об изменении кинетической энергии для шайбы за всё движение: работа силы тяжести равна нулю ($\Delta y = 0$), работа трения $-F_{\text{тр}}S = -mg\sin\alpha\,S$ (трение направлено против скорости на всём пути):

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -mg\sin\alpha\,S \quad\Rightarrow\quad v_0^2 - v_1^2 = 2g\sin\alpha\,c\,t.$$

Подставляя v_1 из пункта 2,

$$t = \frac{v_0}{2g\sin\alpha\,(1-\cos\varphi_0)}\left[1 - \left(\frac{1-\cos\varphi_0}{1-\cos\varphi_1}\right)^2\right] = \frac{64 - 4{,}27}{2\cdot 4{,}9\cdot 4{,}00}\,\text{с} \approx 1{,}52\,\text{с}.$$

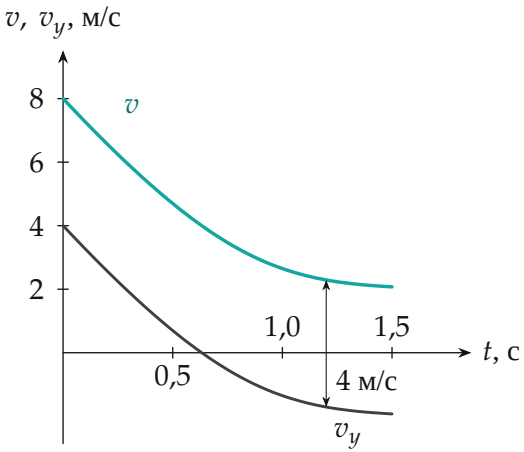


Рис. 4. Скорость $v(t)$ (бирюзовая линия) и проекция $v_y(t)$ (чёрная): расстояние между ними по вертикали постоянно и равно $c = 4$ м/с. В верхней точке ($t \approx 0{,}63$ с) $v_y = 0$ и $v = u = c$

Проверка. Размерность: a — м/с^2, c, u, v_1 — м/с, t — с. Предел: при $\varphi \to 180°$ (шайба скользит вниз по доске) $a \to 0$ и $v \to c/2 = 2$ м/с — установившаяся скорость, при которой трение уравновешивает скатывающую силу; значение $v_1 = 2{,}07$ м/с к ней близко. Второй способ для времени: из нормального ускорения $dt = \dfrac{v\,d\varphi}{g\sin\alpha\sin\varphi}$ и $v = \dfrac{c}{1-\cos\varphi}$ интегрирование по φ от φ_0 до φ_1 даёт

$$t = \frac{c}{2g\sin\alpha}\left(\frac{1}{1-\cos\varphi_0} - \frac{1}{1-\cos\varphi_1} + \ln\frac{\operatorname{tg}(\varphi_1/2)}{\operatorname{tg}(\varphi_0/2)}\right) \approx 1{,}52\text{ с},$$

то же число. Численное интегрирование уравнений движения на python (шаг 10^{-4} с) даёт $\varphi_1 = 159{,}30°$, $t = 1{,}524$ с — значение φ_1 в условии согласуется с динамикой, а сам φ_1 однозначно определяется значениями v_0, φ_0, α (его можно найти, приравняв два выражения для t), поэтому условие задачи избыточно.

Ответ. 1) $a_0 = 2g\sin\alpha\cos(\varphi_0/2) \approx 8{,}49$ м/с^2, $a_1 = 2g\sin\alpha\cos(\varphi_1/2) \approx 1{,}76$ м/с^2; 2) $u = v_0(1-\cos\varphi_0) \approx 4{,}00$ м/с, $v_1 = \dfrac{v_0(1-\cos\varphi_0)}{1-\cos\varphi_1} \approx 2{,}07$ м/с; 3) $t = \dfrac{v_0}{2g\sin\alpha(1-\cos\varphi_0)}\left[1 - \left(\dfrac{1-\cos\varphi_0}{1-\cos\varphi_1}\right)^2\right] \approx 1{,}52$ с.