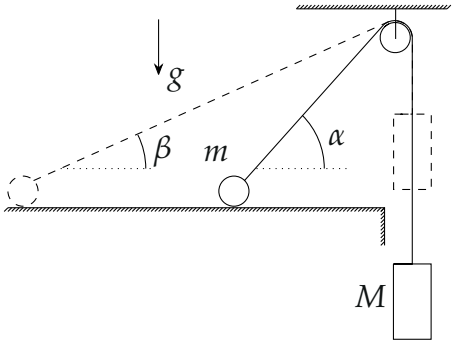
Отрыв

Задача 1. [ВсОШ 2022/23, 9 класс, задача 1] На гладкую горизонтальную поверхность положили маленький шарик массой m. К нему прикрепили легкую нерастяжимую нить, переброшенную через легкий блок пренебрежимо малого радиуса, на другом конце которой подвесили груз массой M (см. рис.). Систему отпустили из состояния покоя (изображенного на рисунке пунктирной линией). В некоторый момент времени, когда нить наклонена к горизонту под углом α, шарик отрывается от поверхности, а ускорение груза в этот момент времени равно нулю. Трение в оси блока отсутствует.



1. Найдите отношение m/M.
2. Найдите $\sin\beta$ угла нити к горизонту в начальный момент времени.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача динамики со связью через нить. Груз тянет нить, шарик едет по столу к блоку, нить становится всё круче. Стол может только давить вверх, поэтому шарик отрывается, когда вертикальная составляющая силы натяжения сравнялась с mg. Первый пункт — второй закон Ньютона для двух тел в момент отрыва. Во втором нужна скорость в момент отрыва: её дают закон сохранения энергии (связь со стартовым углом β) и кинематика нити — шарик относительно блока одновременно приближается к нему и поворачивается вокруг него, а поворот даёт центростремительное ускорение вдоль нити.

Обозначения. O — блок; h — высота блока над столом; $l = h/\sin\alpha$ — длина наклонного участка нити в момент отрыва; T — сила натяжения нити; v — скорость шарика (горизонтальная), u — скорость груза в момент отрыва; $\vec{a}$ — ускорение шарика; ось x — горизонтально к блоку, ось y — вверх (рис. 1).

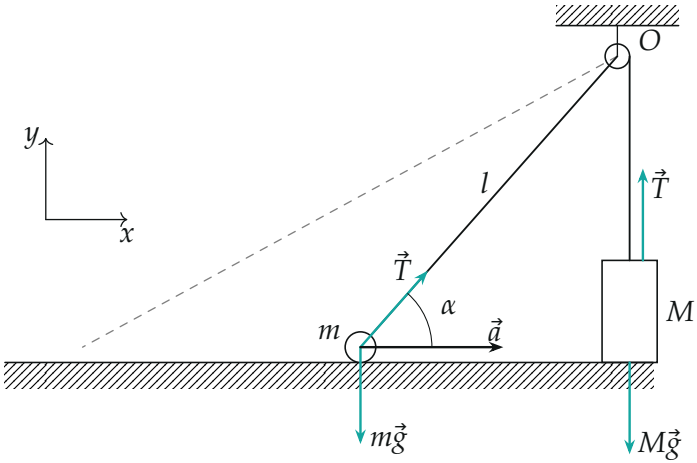


Рис. 1. Силы в момент отрыва ($\alpha = 50°$, в масштабе): на шарик — $\vec{T}$ вдоль нити и $m\vec{g}$, сила реакции стола уже равна нулю; на груз — $\vec{T}$ и $M\vec{g}$; пунктир — начальное положение нити

Пункт 1.

1. Груз. Второй закон Ньютона для груза в проекции на вертикаль; его ускорение в этот момент равно нулю:

$$0 = Mg - T \quad \Rightarrow \quad T = Mg.$$

Нить лёгкая, блок лёгкий и без трения, поэтому натяжение по обе стороны блока одно и то же.

2. Шарик. Второй закон Ньютона для шарика в проекции на ось y. В момент отрыва сила реакции стола $N = 0$, а вертикальной скорости и ускорения у шарика ещё нет (он только начинает отходить от стола):

$$ma_y = T\sin\alpha - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad mg = Mg\sin\alpha, \qquad \frac{m}{M} = \sin\alpha.$$

Пункт 2.

3. Ускорение шарика. Второй закон Ньютона в проекции на ось x:

$$ma = T\cos\alpha = Mg\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad a = \frac{g\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Его проекция на нить (к блоку) $a_{\parallel} = a\cos\alpha = \dfrac{g\cos^2\alpha}{\sin\alpha}$.

4. Связь скоростей. Нить нерастяжима: на сколько укорачивается наклонный участок, на столько опускается груз. Скорость укорочения — проекция скорости шарика на нить (рис. 2): $u = v\cos\alpha$. Вторая составляющая, $v_{\perp} = v\sin\alpha$, перпендикулярна нити — это поворот нити вокруг блока.

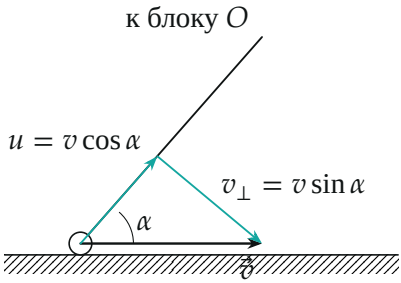


Рис. 2. Скорость шарика раскладывается на составляющую вдоль нити и (её втягивает груз) и перпендикулярную $v_{\perp}$ (нить поворачивается вокруг блока)

5. Центростремительная часть ускорения. Относительно неподвижного блока O шарик делает два движения: приближается к нему со скоростью u и поворачивается вокруг него со скоростью $v_{\perp}$ на расстоянии l (рис. 3). Проекция ускорения на нить складывается из двух частей: изменения скорости втягивания ($\dot{u}$, это ускорение груза, оно равно нулю) и центростремительного ускорения поворота, как при движении по окружности радиуса l вокруг O:

$$a_{\parallel} = \dot{u} + \frac{v_{\perp}^2}{l} = \frac{v^2\sin^2\alpha}{h/\sin\alpha} = \frac{v^2\sin^3\alpha}{h}.$$

Приравняем к шагу 3:

$$\frac{g\cos^2\alpha}{\sin\alpha} = \frac{v^2\sin^3\alpha}{h} \quad \Rightarrow \quad \frac{v^2}{gh} = \frac{\cos^2\alpha}{\sin^4\alpha}.$$

Тот же результат даёт система отсчёта, движущаяся вместе с точкой нити у блока: её ускорение вдоль нити равно ускорению груза, то есть нулю, и в ней шарик просто движется по окружности радиуса l.

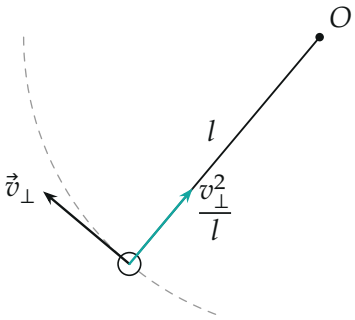


Рис. 3. Поворот нити вокруг блока: шарик идёт по дуге радиуса l со скоростью $v_\perp$, и ускорение к центру O равно $v_\perp^2/l$

6. Закон сохранения механической энергии (трения нет, нить и блок лёгкие) от старта до отрыва. Наклонный участок укоротился с $h/\sin\beta$ до $h/\sin\alpha$, на столько же опустился груз:

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{Mu^2}{2} = Mgh\left(\frac{1}{\sin\beta} - \frac{1}{\sin\alpha}\right).$$

Подставим $m = M\sin\alpha$ и $u = v\cos\alpha$:

$$\frac{v^2}{2}\left(\sin\alpha + \cos^2\alpha\right) = gh\left(\frac{1}{\sin\beta} - \frac{1}{\sin\alpha}\right),$$

$$\frac{1}{\sin\beta} = \frac{1}{\sin\alpha} + \frac{v^2}{gh}\cdot\frac{\sin\alpha + \cos^2\alpha}{2}.$$

7. Ответ. Подставим $\dfrac{v^2}{gh}$ из шага 5 и приведём к общему знаменателю

$2\sin^4\alpha$:

$$\frac{1}{\sin\beta} = \frac{2\sin^3\alpha + \cos^2\alpha\sin\alpha + \cos^4\alpha}{2\sin^4\alpha} = \frac{\sin\alpha + \sin^3\alpha + \cos^4\alpha}{2\sin^4\alpha}$$

(использовано $\cos^2\alpha\sin\alpha = \sin\alpha - \sin^3\alpha$), откуда

$$\sin\beta = \frac{2\sin^4\alpha}{\sin\alpha + \sin^3\alpha + \cos^4\alpha}.$$

Зависимость $\beta(\alpha)$ — на рис. 4.

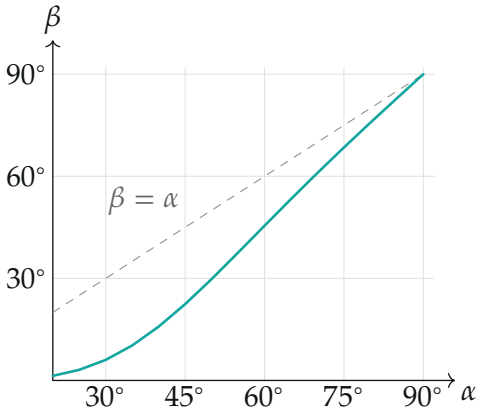


Рис. 4. Начальный угол β, при котором отрыв происходит при угле α (по формуле ответа); кривая всегда ниже прямой $\beta = \alpha$

Обратите внимание. Ускорение шарика вдоль нити не равно ускорению груза: груз не ускоряется, а шарик ускоряется вдоль нити за счёт поворота нити (центростремительная часть $v_\perp^2/l$). Условие «ускорение груза равно нулю» и даёт $\dot{u} = 0$.

Проверка. Пределы: $\alpha \to 90°$ даёт $\sin\beta \to 2/2 = 1$, $\beta = 90°$ — шарик под самым блоком, двигаться некуда; при всех $\alpha < 90°$ получается $\beta < \alpha$ (рис. 4), как и должно быть: нить по ходу движения становится круче. Численное интегрирование уравнений движения (python, $\alpha = 40°, 50°, 60°$) со стартовым углом из ответа даёт отрыв ровно при

угле α с $T/(Mg) = 1{,}000$. Размерность: $v^2/(gh)$ безразмерно, ответ — безразмерный синус.

Ответ. 1) $m/M = \sin\alpha$; 2) $\sin\beta = \dfrac{2\sin^4\alpha}{\sin\alpha + \sin^3\alpha + \cos^4\alpha}$.