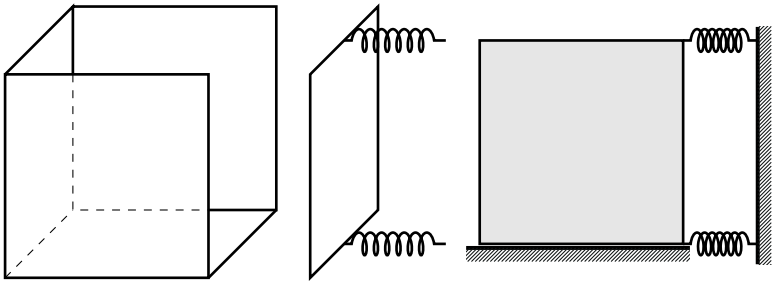
Аквариум на пружинах

Задача 2. [ВсОШ 2022/23, 9 класс, задача 2] У кубического тонкостенного аквариума ($a \times a \times a$) разбилась боковая стенка. Новую стенку ($a \times a$) решили прижать пружинными фиксаторами. Первую пружину жесткостью $2k$ закрепили у середины верхнего ребра новой стенки, а вторую пружину жесткостью k — у середины нижнего ребра. После этого аквариум придвинули к вертикальной стене (см. рис.).



Все поверхности в местах контакта новой стенки с аквариумом плоские и гладкие. Новая стенка жесткая, полностью перекрывает прилегающие боковые стенки и дно, и параллельна плоскости стены. Сила трения в месте контакта стенки со столом пренебрежимо мала. Длины пружин в недеформированном состоянии одинаковы.

1. Каким должно быть минимальное сжатие пружин, чтобы аквариум можно было наполнить водой плотностью ρ до краёв?

Во время заполнения аквариум считать неподвижным, а вода не просачивается в местах контакта стенки с аквариумом.

2. Каким станет минимальное сжатие пружин, если их поменять местами?

Ускорение свободного падения g считать известным.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача статики твёрдого тела с гидростатикой. Стенку прижимают к аквариуму две пружины, а вода изнутри её отталкивает. Аквариум касается стенки по краям боковых стенок и дна и может только *давить* на неё, но не тянуть. Стенка отойдёт, если либо сила воды больше сил пружин, либо стенка повернётся вокруг

верхнего или нижнего ребра — края аквариума её не удержат. Значит, нужны три условия: на силу и на моменты относительно обоих рёбер. Для моментов надо знать, где приложена сила давления воды: давление растёт с глубиной, и точка приложения ниже середины.

Обозначения. Δx — сжатие пружин (одно и то же: длины в свободном состоянии равны, а стенка параллельна стене); y — глубина от поверхности воды; F_P — сила давления воды на стенку; $M_\text{в}$, $M_\text{н}$ — моменты силы давления относительно верхнего и нижнего рёбер стенки.

1. Сила давления воды. Давление на глубине y по закону гидростатики $p = \rho g y$ (атмосферное давление действует на стенку с обеих сторон и сокращается). Оно растёт линейно от 0 у поверхности до $\rho g a$ у дна (рис. 1). Сила — давление, умноженное на площадь; при линейном росте — среднее давление $\rho g a/2$ на площадь a^2:

$$F_P = \frac{\rho g a}{2} \cdot a^2 = \frac{\rho g a^3}{2}.$$

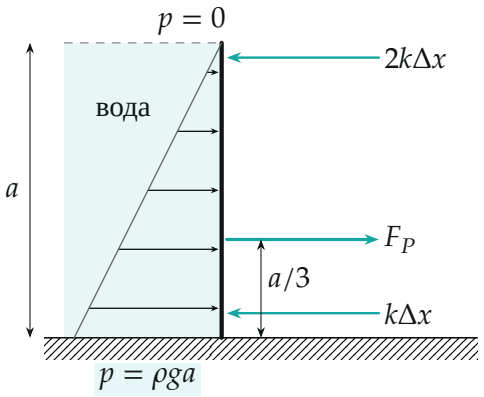


Рис. 1. Новая стенка сбоку: давление воды растёт с глубиной (эпюра — треугольник), равнодействующая F_P приложена на высоте $a/3$ от дна; пружины давят на верхнее и нижнее рёбра

2. Где приложена F_P. Разрежем стенку на горизонтальные полоски одинаковой ширины. Сила на полоску пропорциональна давлению, то есть длине стрелки эпюры на рис. 1. Распределение сил по высоте такое

же, как распределение массы треугольника, разрезанного на полоски параллельно основанию. Значит, точка приложения совпадает по высоте с центром масс треугольника — точкой пересечения медиан, на трети высоты от основания: *на высоте $a/3$ от дна*, то есть на глубине $2a/3$. По горизонтали — на средней вертикали стенки (давление вдоль горизонтали одинаково).

Отсюда моменты силы давления относительно рёбер:

$$M_{\text{в}} = F_P \cdot \frac{2a}{3} = \frac{\rho g a^4}{3}, \qquad M_{\text{н}} = F_P \cdot \frac{a}{3} = \frac{\rho g a^4}{6}.$$

Те же числа даёт интегрирование: $M_{\text{в}} = \int_0^a y\, \rho g y\, a\, \mathrm{d}y = \frac{\rho g a^4}{3}$.

3. Три условия. Стенка остаётся на месте, пока силы реакции краёв аквариума на неё неотрицательны на всей высоте. Это равносильно трём неравенствам (рис. 2):

- *не отойдёт целиком* — сумма сил пружин не меньше силы воды: $3k\Delta x \geq \frac{\rho g a^3}{2}$, то есть $k\Delta x \geq \frac{\rho g a^3}{6}$;
- *не повернётся вокруг верхнего ребра* (низ отходит). Уравнение моментов относительно верхнего ребра: верхняя пружина проходит через ось и момента не даёт, нижняя действует на плече a: $k\Delta x \cdot a \geq \frac{\rho g a^4}{3}$, то есть $k\Delta x \geq \frac{\rho g a^3}{3}$;
- *не повернётся вокруг нижнего ребра* (верх отходит): $2k\Delta x \cdot a \geq \frac{\rho g a^4}{6}$, то есть $k\Delta x \geq \frac{\rho g a^3}{12}$.

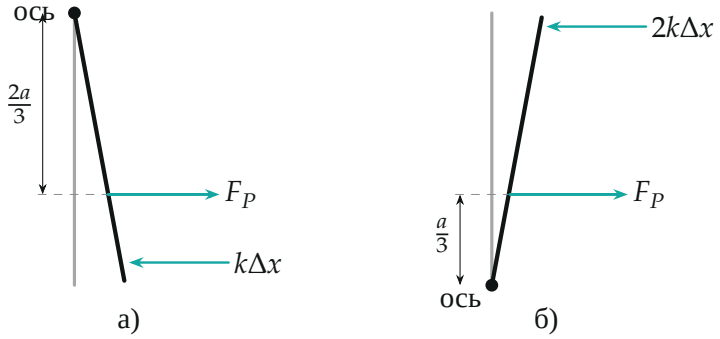


Рис. 2. Опасные повороты: а) вокруг верхнего ребра — держит только нижняя пружина; б) вокруг нижнего ребра — держит только верхняя

4. Ответ на пункт 1. Самое жёсткое — второе условие: нижняя пружина слабая, а вода давит сильнее всего внизу. Поэтому

$$\Delta x_{\min} = \frac{\rho g a^3}{3k}.$$

При этом пружины давят с силой $3k\Delta x = \rho g a^3$ — вдвое больше силы воды: верхняя пружина работает «впустую».

Пункт 2.

5. Пружины поменяли местами (рис. 3): $2k$ внизу, k вверху. Те же три условия:

$$3k\Delta x \geq \frac{\rho g a^3}{2}, \qquad 2k\Delta x \cdot a \geq \frac{\rho g a^4}{3}, \qquad k\Delta x \cdot a \geq \frac{\rho g a^4}{6}.$$

Все три дают одно и то же: $k\Delta x \geq \dfrac{\rho g a^3}{6}$, поэтому

$$\Delta x_{\min} = \frac{\rho g a^3}{6k}.$$

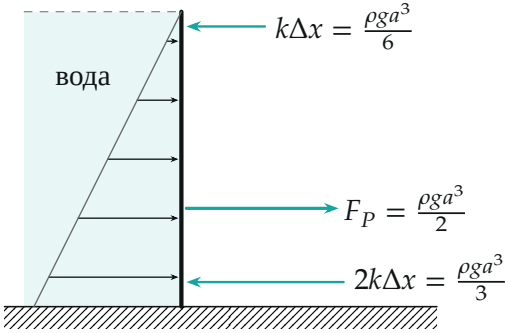


Рис. 3. Пружины поменяли местами: при $k\Delta x = \rho g a^3/6$ силы пружин $\rho g a^3/6$ и $\rho g a^3/3$ в сумме равны F_P, а их равнодействующая проходит на высоте $a/3$ — ровно через точку приложения F_P

Смысл: теперь силы пружин в отношении 1 : 2 (верх : низ) — так же, как делит стенку точка приложения силы воды ($a/3$ от дна, $2a/3$ от верха). Равнодействующая пружин совпадает с F_P и по величине, и по линии действия, и краям аквариума ничего добавлять не нужно — в минимальном случае они на стенку не давят вовсе.

Обратите внимание. Сила воды приложена не в середине стенки, а на $a/3$ от дна; если взять середину, получится неверно $\rho g a^3/(4k)$ в пункте 1. Условие на силу недостаточно: в пункте 1 оно требует вдвое меньшего сжатия, чем нужно.

Проверка. Размерность: $\rho g a^3$ — сила, делённая на k — длина. Сжатие в пункте 2 вдвое меньше: сильная пружина стоит там, где вода давит сильнее. Второй способ (виртуальное перемещение): если низ стенки отойдёт на δx (поворот вокруг верха), вода в зазор-клин сместится из верхнего слоя, и её центр тяжести опустится на $2a/3$; работа силы тяжести $\frac{\rho a^2 \delta x}{2} g \frac{2a}{3}$ должна быть не больше работы нижней пружины $k\Delta x\,\delta x$ — снова $k\Delta x \geq \rho g a^3/3$.

Ответ. 1) $\Delta x_{\min} = \dfrac{\rho g a^3}{3k}$; 2) $\Delta x_{\min} = \dfrac{\rho g a^3}{6k}$.