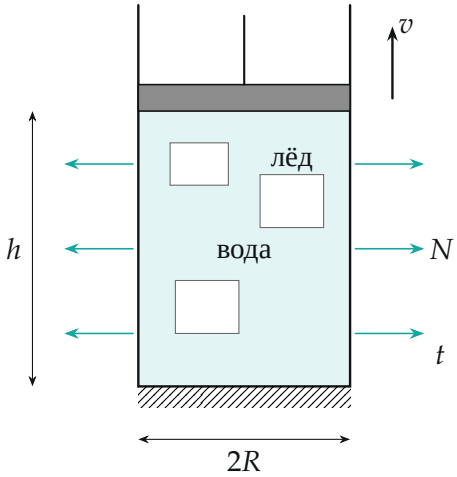
Холодильник

Задача 3. [ВсОШ 2022/23, 9 класс, задача 3] В тонкостенном цилиндрическом сосуде внутреннего радиуса R под поршнем находится столб воды высотой h_1 при температуре $t_0 = 0$ °C. Поршень и дно цилиндра теплоизолированные. Мощность тепловых потерь через боковые стенки пропорциональна площади контакта и разности температур содержимого сосуда и окружающей среды $N = \alpha \cdot S\Delta t$, где α известная константа. Цилиндр вертикально ставят в холодильник, начальная температура в котором равна $t_1 < 0$ °C. Далее температуру в холодильнике изменяют так, что поршень цилиндра перемещается с постоянной скоростью. Лёд, образующийся в цилиндре, не мешает свободному движению поршня. Более того, лёд не всплывает над поверхностью воды, а упирается в поршень, будучи полностью погружённым в воду, время от времени отрываясь от стенок сосуда. Удельная теплота плавления льда λ, плотности воды $\rho_в$, плотность льда $\rho_л$.

1. Определите в какую сторону и с какой скоростью v перемещается поршень.
2. Найдите в течение какого промежутка времени τ_{max} продолжается такое движение.
3. Установите зависимость температуры t в холодильнике от времени τ в промежутке времени $[0,\ \tau_{max}]$. Выразите её через h_1, t_0, t_1, v, τ.
4. Найдите температуру в момент времени τ_{max}. Выразите через t_0, t_1, $\rho_в$, $\rho_л$.



Поясняющий рисунок: столб воды со льдом под поршнем высотой h; тепло уходит через боковую стенку к воздуху холодильника при температуре t, поршень поднимается со скоростью v

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на фазовый переход и теплообмен. Пока в сосуде есть вода, всё содержимое (вода и плавающий в ней лёд) имеет температуру 0 °C: тепло, уходящее через стенки, отбирается не на охлаждение, а на кристаллизацию. Лёд легче воды, значит занимает больший объём: кристаллизация расширяет содержимое и поднимает поршень. Скорость поршня пропорциональна мощности теплоотдачи, а мощность — площади смоченной боковой стенки $2\pi Rh$ и разности температур $t_0 - t$. Столб растёт, площадь растёт, поэтому для постоянной скорости холодильник надо постепенно отогревать.

Обозначения. h — высота содержимого под поршнем в момент τ; t — температура в холодильнике; N — мощность теплоотдачи; Δm — масса воды, замёрзшей за малое время $\Delta\tau$; $C = \dfrac{2\alpha(\rho_в - \rho_л)}{\lambda\rho_в\rho_л R}$ — постоянная, которая появится в шаге 3.

Пункт 1.

1. Уравнение теплового баланса за малое время $\Delta\tau$: всё тепло, ушедшее через стенку, выделилось при кристаллизации (температура содер-

жимого остаётся $t_0 = 0\,^\circ\text{C}$, пока есть вода):

$$N\Delta\tau = \lambda\Delta m, \qquad N = \alpha \cdot 2\pi Rh\,(t_0 - t).$$

Площадь контакта — вся боковая поверхность под поршнем: и вода, и лёд в ней при $0\,^\circ\text{C}$.

2. Изменение объёма. Масса Δm занимала объём $\Delta m/\rho_\text{в}$, а став льдом — $\Delta m/\rho_\text{л}$ (рис. 1). Прирост объёма содержимого

$$\Delta V = \frac{\Delta m}{\rho_\text{л}} - \frac{\Delta m}{\rho_\text{в}} = \Delta m\,\frac{\rho_\text{в} - \rho_\text{л}}{\rho_\text{в}\rho_\text{л}} > 0,$$

так как $\rho_\text{л} < \rho_\text{в}$. Объём растёт — *поршень движется вверх*, на $\Delta h = \Delta V/(\pi R^2)$.

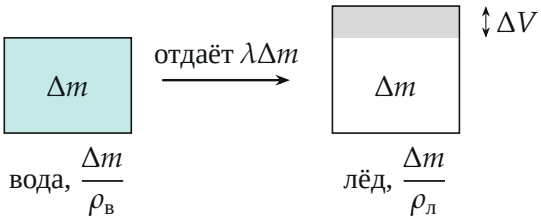


Рис. 1. Та же масса льда занимает больший объём, чем вода; излишек ΔV (серая полоска, увеличена) поднимает поршень

3. Скорость поршня. Подставим $\Delta m = N\Delta\tau/\lambda$:

$$v = \frac{\Delta h}{\Delta\tau} = \frac{N}{\lambda\pi R^2}\cdot\frac{\rho_\text{в} - \rho_\text{л}}{\rho_\text{в}\rho_\text{л}} = \frac{2\alpha(\rho_\text{в} - \rho_\text{л})}{\lambda\rho_\text{в}\rho_\text{л}R}\,h\,(t_0 - t) = C\,h\,(t_0 - t).$$

Скорость постоянна, значит произведение $h(t_0 - t)$ всё время такое же, как в начале: $h(t_0 - t) = h_1(t_0 - t_1)$. Поэтому

$$v = \frac{2\alpha(\rho_\text{в} - \rho_\text{л})}{\lambda\rho_\text{в}\rho_\text{л}R}\,h_1(t_0 - t_1), \quad \text{вверх.}$$

Попутно: мощность $N = 2\pi\alpha Rh(t_0 - t) = 2\pi\alpha Rh_1(t_0 - t_1)$ тоже постоянна — лёд нарастает с постоянной скоростью.

Пункт 2.

4. Когда кончится вода. Движение с постоянной скоростью идёт, пока есть вода (потом содержимое начнёт остывать ниже $0\,^\circ\mathrm{C}$, и кристаллизации не будет). Вся вода массой $m_0 = \rho_в \pi R^2 h_1$ превращается в лёд высотой $h_к = h_1 \dfrac{\rho_в}{\rho_л}$. Поршень проходит путь $h_к - h_1 = h_1 \dfrac{\rho_в - \rho_л}{\rho_л}$ со скоростью v:

$$\tau_{max} = \frac{h_к - h_1}{v} = \frac{h_1(\rho_в - \rho_л)}{\rho_л} \cdot \frac{\lambda \rho_в \rho_л R}{2\alpha(\rho_в - \rho_л)h_1(t_0 - t_1)} = \frac{\lambda \rho_в R}{2\alpha(t_0 - t_1)}.$$

Второй способ: мощность N постоянна (шаг 3), и за τ_{max} она отводит теплоту кристаллизации всей воды: $N\tau_{max} = \lambda \rho_в \pi R^2 h_1$, откуда $\tau_{max} = \dfrac{\lambda \rho_в \pi R^2 h_1}{2\pi\alpha R h_1 (t_0 - t_1)} = \dfrac{\lambda \rho_в R}{2\alpha(t_0 - t_1)}$ — то же.

Пункт 3.

5. Закон изменения температуры. Из $h(t_0 - t) = h_1(t_0 - t_1)$ и равномерного движения $h = h_1 + v\tau$:

$$t = t_0 - (t_0 - t_1)\frac{h_1}{h_1 + v\tau}.$$

Холодильник постепенно отогревают: с ростом столба та же мощность набирается при меньшей разности температур (рис. 2).

Пункт 4.

6. Конечная температура. В момент τ_{max} высота $h = h_к = h_1 \rho_в / \rho_л$, поэтому

$$t_к = t_0 - (t_0 - t_1)\frac{h_1}{h_к} = t_0 - (t_0 - t_1)\frac{\rho_л}{\rho_в}.$$

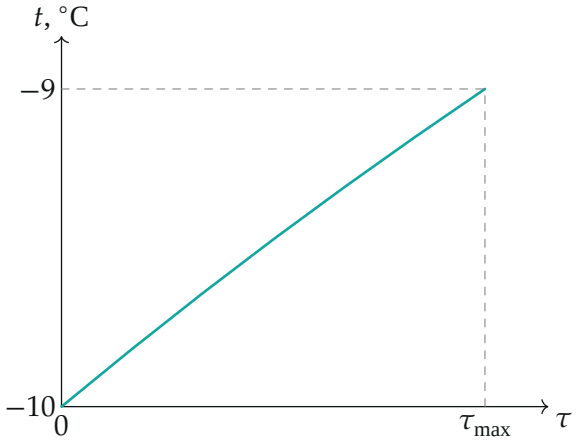


Рис. 2. Температура в холодильнике по формуле пункта 3 при $t_1 = -10\,^\circ C$ и $\rho_л/\rho_в = 0{,}9$: растёт от $-10\,^\circ C$ до $t_к = -9\,^\circ C$, чуть выпукло вверх, так как h растёт линейно, а $t_0 - t \propto 1/h$

Обратите внимание. Тепло уходит через всю боковую стенку под поршнем, а не только через часть, занятую водой: лёд плавает в воде, и всё содержимое при 0 °C. Поршень поднимается не потому, что вода «расширяется при охлаждении», а потому, что лёд менее плотный.

Проверка. Размерность v: $\dfrac{[\alpha]\,\text{м}\cdot\text{К}}{[\lambda]\,[\rho]\,\text{м}}$, где $[\alpha] = \text{Вт}/(\text{м}^2\cdot\text{К})$, $[\lambda\rho] = \text{Дж}/\text{м}^3$: $\dfrac{\text{Вт}/\text{м}^2}{\text{Дж}/\text{м}^3} = \text{м/с}$. Предел $\rho_л \to \rho_в$: $v \to 0$, поршень стоит, и $t_к \to t_1$ — температуру менять не нужно, высота не меняется. Второй способ для τ_{max} совпал с первым. Знак: $t_к > t_1$ — холодильник отогревали.

Ответ. 1) вверх, $v = \dfrac{2\alpha(\rho_в - \rho_л)}{\lambda\rho_в\rho_л R}\,h_1(t_0 - t_1)$; 2) $\tau_{max} = \dfrac{\lambda\rho_в R}{2\alpha(t_0 - t_1)}$; 3) $t = t_0 - (t_0 - t_1)\dfrac{h_1}{h_1 + v\tau}$; 4) $t_к = t_0 - (t_0 - t_1)\dfrac{\rho_л}{\rho_в}$.