Постоянный ток

Задача 4. [ВсОШ 2022/23, 9 класс, задача 4] В упрощённой модели источник постоянного тока состоит из соединённых последовательно идеального источника постоянного напряжения U_0 и резистора с сопротивлением r (см. рис. 1). При подключении источника постоянного тока в цепь, содержащую резисторы с сопротивлением $R \ll r$, можно считать, что сила тока $I_0 \approx U_0/r$.

Электрическая цепь представляет собой проволочную сетку, которая состоит из звеньев одинакового сопротивления R. Три звена заменены на одинаковые источники постоянного тока I_0 (см. рис. 2).

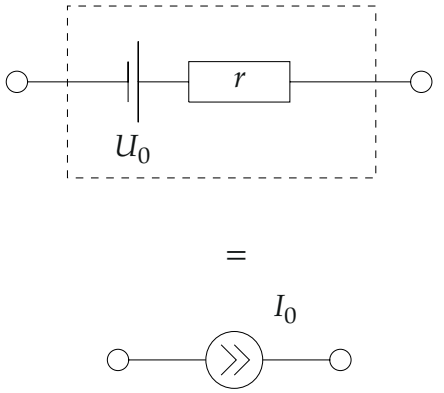

Рис. 1

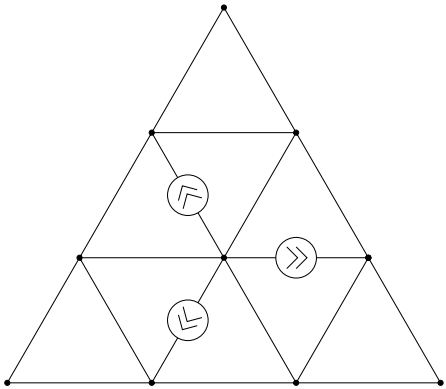

Рис. 2

Найдите, через какие звенья цепи течёт минимальный ток, и чему равна его сила $I_{\min}$. Ответ выразите только через I_0.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на расчёт разветвлённой цепи с источниками тока. Источник тока (сопротивление $r \gg R$) задаёт силу тока в своём звене — I_0, что бы ни было подключено. Главная идея — симметрия: сетка переходит сама в себя при повороте на 120° вокруг центрального узла O, вместе с источниками. Значит, у токов и потенциалов в повёрнутых местах те же значения. Это оставляет две неизвестные силы тока, которые находим из закона сохранения заряда для узла и равенства потенциалов симметричных узлов.

Обозначения. O — центральный узел; A, B, C — вершины большого треугольника; I_1 — ток в звеньях, сходящихся в O (кроме источников); I — ток в звеньях-сторонах у вершин; φ — потенциалы узлов.

1. Токи у центра. Все три источника выходят из узла O и выталкивают из него по I_0 (рис. 3, слева). Остальные три звена у узла O при повороте на 120° переходят друг в друга, поэтому токи в них одинаковы, I_1 (рис. 3, справа). Закон сохранения заряда (первое правило Кирхгофа) для узла O: втекает $3I_1$, вытекает $3I_0$:

$$3I_1 = 3I_0 \quad \Rightarrow \quad I_1 = I_0.$$

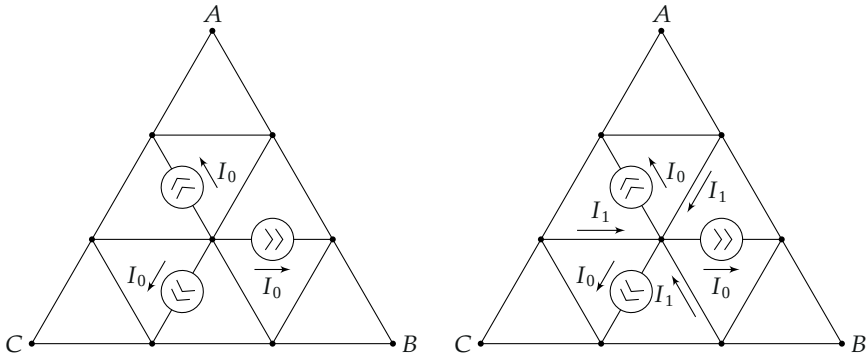

Рис. 3. Слева: источники выталкивают из центра по I_0; справа: по симметрии в три других звена у центра втекают одинаковые токи I_1

2. Токи у вершины. Рассмотрим вершину A. Ток I входит в неё по одной стороне и выходит по другой (в вершине сходятся только два звена). По симметрии такие же токи у вершин B и C (рис. 4). Пусть в звеньях, соединяющих узлы у вершин (основания маленьких угловых треугольников и внутренние звенья), течёт ток I_2.

3. Равенство потенциалов. Узлы-вершины A и C при повороте на 120° переходят друг в друга, поэтому $\varphi_A = \varphi_C$. Запишем разность потенциалов между ними по пути вдоль левой стороны большого треугольника (закон Ома для каждого звена, рис. 4): от C к середине

стороны ток I идёт по направлению обхода, дальше по звену с током I_2 — против, затем по звену у A — снова I:

$$\varphi_C - \varphi_A = IR - I_2R + IR = 0 \quad \Rightarrow \quad I_2 = 2I.$$

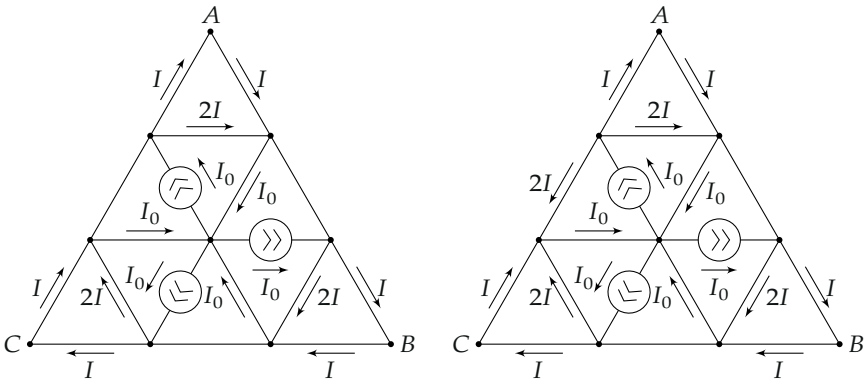

Рис. 4. Токи в звеньях: у каждой вершины по сторонам течёт I, в соседних звеньях — $2I$, у центра — I_0

4. Узел у источника. Закон сохранения заряда для узла, в который приходит источник (например, верхнего левого): входит I_0 от источника, выходит по трём звеньям — к вершине (I) и двум другим ($2I$ и $2I$):

$$I_0 = I + 2I + 2I = 5I \quad \Rightarrow \quad I = \frac{I_0}{5}.$$

Все токи: $I_0/5$, $2I_0/5$ и I_0. Минимальный — $I_{\min} = I_0/5$, в шести звеньях-сторонах большого треугольника, сходящихся в его вершинах A, B, C (по два у каждой).

5. Проверка расчётом потенциалов. Решим всю цепь узловым методом (python): примем $\varphi_O = 0$ и запишем первое правило Кирхгофа для всех 10 узлов. Потенциалы в единицах $I_0R/5$ — на рис. 5: у концов источников 7, у вершин 6, у остальных узлов 5. Ток по закону Ома $(\varphi_1 - \varphi_2)/R$: между 7 и 6 — $I_0/5$, между 7 и 5 — $2I_0/5$, от 5 к центру — I_0. Всё совпало.

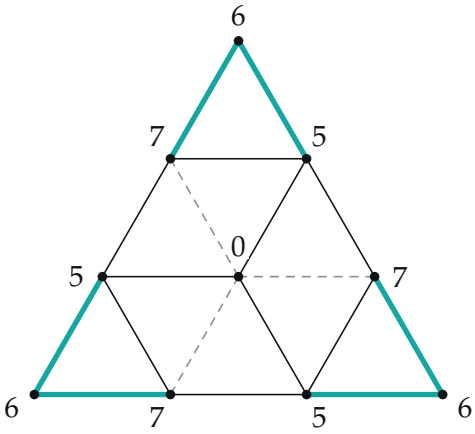

Рис. 5. Потенциалы узлов в единицах $I_0R/5$ (центр — 0); пунктир — источники, толстые бирюзовые звенья — минимальный ток $I_0/5$

Обратите внимание. Источник тока задаёт силу тока, а не напряжение: напряжение на нём (здесь $7I_0R/5$) подстраивается под цепь. Поэтому токи в звеньях у центра равны I_0 сразу из закона сохранения заряда, без расчёта.

Проверка. Баланс токов в узле с потенциалом 5 (например, правом верхнем): в него втекают $2I_0/5$ и $2I_0/5$ из двух узлов с потенциалом 7 и $I_0/5$ из вершины A, вытекает I_0 к центру: $\frac{2}{5}+\frac{2}{5}+\frac{1}{5}=1$. Размерность: ответ — сила тока, выражен через I_0; от R не зависит, как и должно быть в цепи из одинаковых звеньев с источниками тока.

Ответ. $I_{\min}=I_0/5$; он течёт через шесть звеньев — стороны большого треугольника, сходящиеся в его вершинах (по два звена у каждой вершины).