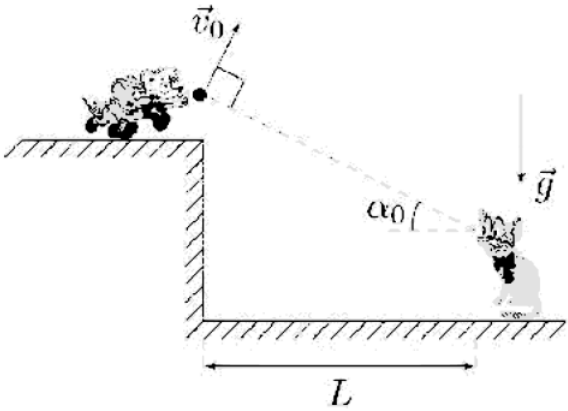
Угловая высота камня

Задача 5. [ВсОШ 2022/23, 9 класс, задача 5] Кот Леопольд стоит на горизонтальной поверхности земли на некотором расстоянии L от вертикального обрыва скалы. С края обрыва мыши бросают камень таким образом, что вектор начальной скорости камня $\vec{v}_0$, модуль которой равен $v_0 = 10$ м/с, направлен перпендикулярно лучу зрения Леопольда.



Угол между горизонтом и лучом зрения Леопольда, направленным на камень, в момент броска был равен $\alpha_0 = 25°$, а через некоторое время t_1 после броска камня достиг максимального значения, равного $\alpha_1 = 38°$.

Леопольд и траектория броска находятся в одной вертикальной плоскости, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

1. Чему равно время t_1?
2. На каком расстоянии L от скалы находился Леопольд?

▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача кинематики движения тела, брошенного под углом к горизонту. Камень летит по параболе, а Леопольд следит за ним; угол луча зрения сначала растёт, потом падает. Главная идея: в момент, когда угол максимален, луч зрения *касается* траектории — скорость камня направлена прямо вдоль луча, на Леопольда. Если бы у скорости была составляющая поперёк луча, луч продолжал бы поворачиваться, и угол ещё менялся бы. Направления двух

скоростей известны — время найдём из треугольника скоростей, а расстояние — из координат камня.

Обозначения. Леопольд (его глаза) — в начале координат, глаза считаем на уровне земли; ось x — горизонтально к скале, ось y — вверх; $\vec{v}_1$ — скорость камня в момент t_1; высота скалы $H = L\,\mathrm{tg}\,\alpha_0$ (из начального угла луча, рис. 1).

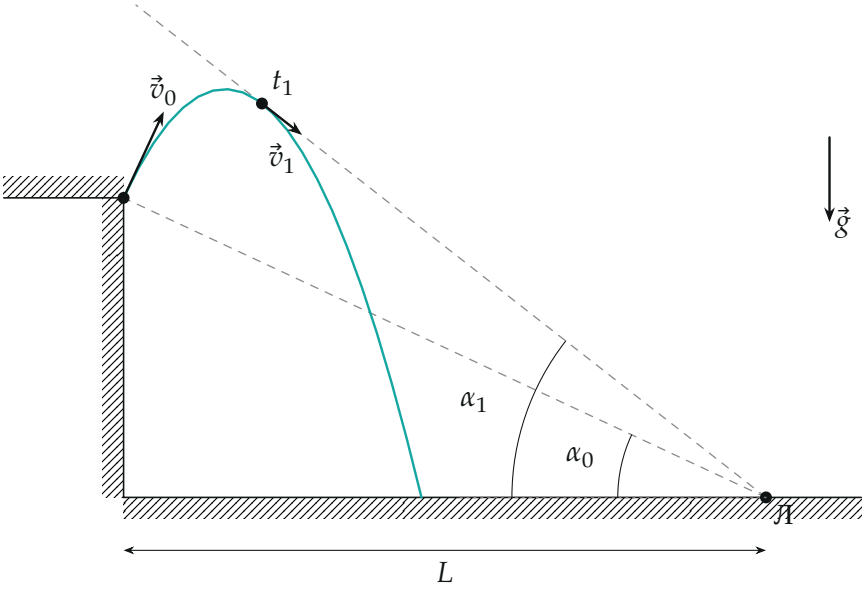


Рис. 1. Траектория камня в масштабе (по найденным L и t_1): начальная скорость перпендикулярна лучу под углом α_0, в момент t_1 скорость направлена вдоль луча под углом α_1 — луч касается параболы; Л — Леопольд

Пункт 1.

1. Направления скоростей. Луч зрения в момент броска наклонён к горизонту на α_0, а $\vec{v}_0$ ему перпендикулярна, поэтому $\vec{v}_0$ составляет угол α_0 с *вертикалью* и направлена вверх, в сторону Леопольда. В момент t_1 скорость $\vec{v}_1$ направлена вдоль луча на Леопольда — вниз под углом α_1 к горизонту (рис. 1).

2. Треугольник скоростей. При полёте с ускорением $\vec{g}$ скорость меняется так: $\vec{v}_1 = \vec{v}_0 + \vec{g}t_1$ — векторы $\vec{v}_0$, $\vec{g}t_1$ и $\vec{v}_1$ образуют треугольник (рис. 2). Его углы: между $\vec{v}_0$ и вертикальной стороной $\vec{g}t_1$ — α_0;

между $\vec{v}_1$ и вертикалью — $90° - \alpha_1$; третий угол, между $\vec{v}_0$ и $\vec{v}_1$, — $180° - \alpha_0 - (90° - \alpha_1) = 90° + \alpha_1 - \alpha_0$. По теореме синусов

$$\frac{gt_1}{\sin(90° + \alpha_1 - \alpha_0)} = \frac{v_0}{\sin(90° - \alpha_1)},$$

$$t_1 = \frac{v_0 \cos(\alpha_1 - \alpha_0)}{g \cos \alpha_1} = \frac{10 \cdot \cos 13°}{10 \cdot \cos 38°} \text{ с} \approx 1{,}24 \text{ с}.$$

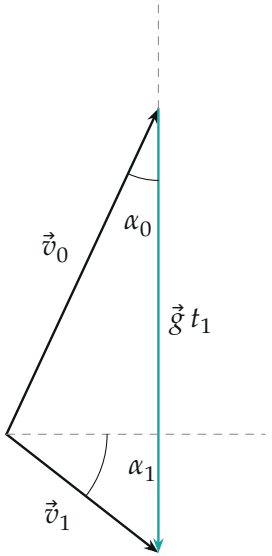


Рис. 2. Треугольник скоростей в масштабе: $\vec{v}_1 = \vec{v}_0 + \vec{g}t_1$; $v_0 = 10$ м/с, $gt_1 \approx 12{,}4$ м/с, $v_1 \approx 5{,}4$ м/с

3. Второй способ — проекции. Горизонтальная составляющая скорости не меняется: $v_0 \sin \alpha_0 = v_1 \cos \alpha_1$. Вертикальная уменьшается на gt_1: $v_0 \cos \alpha_0 - gt_1 = -v_1 \sin \alpha_1$. Отсюда $gt_1 = v_0 \cos \alpha_0 + v_0 \sin \alpha_0 \operatorname{tg} \alpha_1 = \dfrac{v_0 \cos(\alpha_1 - \alpha_0)}{\cos \alpha_1}$ — то же.

Пункт 2.

4. Координаты камня при равноускоренном движении:

$$x(t) = L - v_0 \sin \alpha_0 \, t, \qquad y(t) = L \operatorname{tg} \alpha_0 + v_0 \cos \alpha_0 \, t - \frac{gt^2}{2}.$$

В момент t_1 камень виден под углом α_1: $y(t_1) = x(t_1)\operatorname{tg}\alpha_1$:

$$L\operatorname{tg}\alpha_0 + v_0\cos\alpha_0\, t_1 - \frac{gt_1^2}{2} = (L - v_0\sin\alpha_0\, t_1)\operatorname{tg}\alpha_1.$$

$$L(\operatorname{tg}\alpha_1 - \operatorname{tg}\alpha_0) = v_0 t_1(\cos\alpha_0 + \sin\alpha_0\operatorname{tg}\alpha_1) - \frac{gt_1^2}{2}.$$

По шагу 3 $v_0(\cos\alpha_0 + \sin\alpha_0\operatorname{tg}\alpha_1) = gt_1$, и правая часть равна $gt_1^2 - \dfrac{gt_1^2}{2} = \dfrac{gt_1^2}{2}$:

$$L = \frac{gt_1^2}{2(\operatorname{tg}\alpha_1 - \operatorname{tg}\alpha_0)} = \frac{10\cdot 1{,}237^2}{2\cdot(0{,}781 - 0{,}466)}\ \text{м} \approx 24{,}3\ \text{м}.$$

5. Проверка, что это максимум. Угол луча, рассчитанный по координатам (python), — на рис. 3: он растёт от 25°, достигает 38,0° при $t \approx 1{,}24$ с и дальше падает; камень падает на землю при $t \approx 2{,}66$ с, не долетев до Леопольда 11 м. Высота скалы $H = L\operatorname{tg}\alpha_0 \approx 11{,}3$ м.

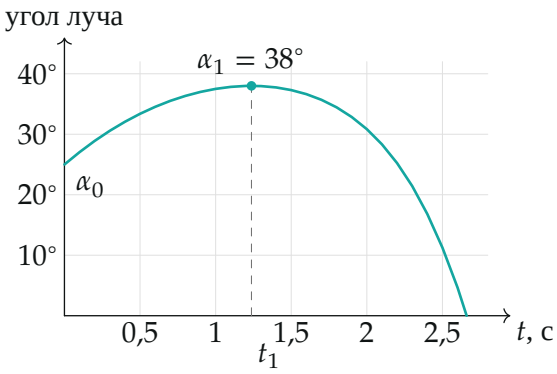


Рис. 3. Угол луча зрения на камень в зависимости от времени (по координатам шага 4): единственный максимум 38° при $t_1 \approx 1{,}24$ с

Обратите внимание. В точке максимума угла скорость камня не горизонтальна (это было бы в верхней точке траектории) — она направлена вдоль луча зрения, вниз. Максимум угла наступает *после* верхней точки: на рис. 1 точка t_1 правее вершины параболы.

Проверка. Размерности: v_0/g — секунды, gt^2 — метры. Предел $\alpha_1 \to \alpha_0$: $t_1 \to v_0/g \cdot 1/\cos\alpha_0$ — конечное, а $L \to \infty$: если угол почти не растёт, Леопольд очень далеко. Подстановка $L = 24{,}3$ м и $t_1 = 1{,}24$ с: $x(t_1) \approx 19{,}0$ м, $y(t_1) \approx 14{,}9$ м, $y/x = 0{,}781 = \operatorname{tg} 38°$.

Ответ. 1) $t_1 = \dfrac{v_0 \cos(\alpha_1 - \alpha_0)}{g \cos\alpha_1} \approx 1{,}24$ с; 2) $L = \dfrac{gt_1^2}{2(\operatorname{tg}\alpha_1 - \operatorname{tg}\alpha_0)} \approx 24{,}3$ м.