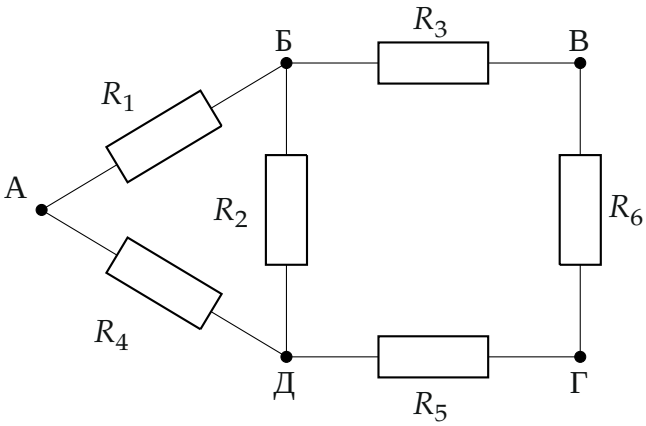
Серый ящик

Задача 2. [ВсОШ 2022/23, региональный этап, 10 класс, задача 2] «Серый ящик».

Оборудование. «Серый ящик», мультиметр.

В выданном вам сером ящике собрана электрическая цепь, схема которой представлена на рисунке. Обозначения выводов на «сером ящике» соответствуют обозначениям на схеме.



При необходимости выводы серого ящика можно соединять друг с другом. С помощью имеющегося оборудования выполните следующие задания.

1. Определите, у какого из резисторов наименьшее сопротивление.
2. Найдите сопротивления всех резисторов и оцените их погрешности.
3. Как необходимо соединить выводы «серого ящика» друг с другом, чтобы сопротивление получившейся цепи между некоторыми двумя точками было равно (167 ± 5) Ом? Укажите, какие выводы необходимо соединить и между какими выводами при этом получится требуемое сопротивление.

Важно! В начале работы укажите номер выданного вам «серого ящика», если ящики занумерованы. *Примечание:* считайте, что погрешность мультиметра составляет 1% от измеряемой величины.

▲ **Решение. Что происходит.** Мультиметр меряет сопротивление только между выводами, а внутри шесть резисторов, соединённых в «кольцо». Главная идея — закорачивать выводы проводом: закороченный резистор выпадает из цепи, и между двумя «узлами» остаётся простое параллельное соединение двух-трёх резисторов. Для параллельного соединения складываются проводимости $1/R$, поэтому три измерения дают три линейных уравнения на три проводимости — система решается в одну строку. Класс задачи — «чёрный ящик» с перебором соединений.

Обозначения. $g_i = 1/R_i$ — проводимость резистора R_i; $R_а$, $R_б$, $R_в$, R_x, R_y, R_z — показания мультиметра в шести опытах.

1. Большие резисторы R_3, R_5, R_6 (рис. 2). Три опыта:

- замкнуты Б с Д и В с Г, меряем между этими парами: R_2 и R_6 закорочены, R_1, R_4 висят на одном узле и тока не несут, остаются $R_3 \parallel R_5$: $1/R_а = g_3 + g_5$;
- замкнуты Б с Г, меряем между ними и В: $1/R_б = g_3 + g_6$;
- замкнуты В с Д, меряем между ними и Г: $1/R_в = g_5 + g_6$.

Складывая и вычитая,

$$g_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_а} + \frac{1}{R_б} - \frac{1}{R_в}\right), \quad g_5 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_а} + \frac{1}{R_в} - \frac{1}{R_б}\right), \quad g_6 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_б} + \frac{1}{R_в} - \frac{1}{R_а}\right).$$

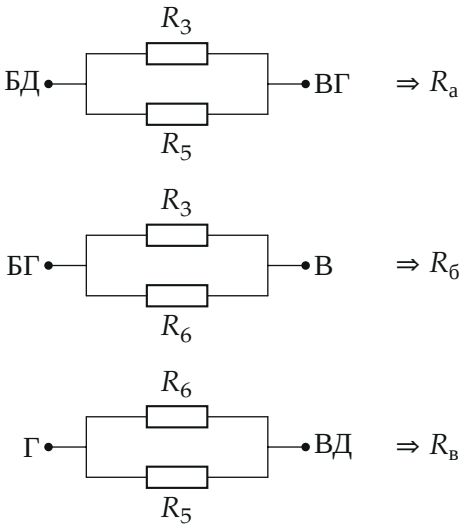


Рис. 2. Эквивалентные схемы трёх опытов с закороченными выводами (подписи у узлов — какие выводы соединены).

2. Малые резисторы R_1, R_2, R_4**.** Замкнём Б, В и Г в один узел: R_3 и R_6 закорочены, и остаётся треугольник А — (БВГ) — Д, где между (БВГ) и Д стоят параллельно R_2 и R_5 (рис. 3). Ещё три опыта (Б, В, Г замкнуты всё время):

$$\begin{aligned}
&\text{Д замкнут с узлом, меряем к А:} && 1/R_x = g_1 + g_4,\\
&\text{А замкнут с узлом, меряем к Д:} && 1/R_y = g_4 + g_2 + g_5,\\
&\text{А замкнут с Д, меряем к узлу:} && 1/R_z = g_1 + g_2 + g_5.
\end{aligned}$$

Отсюда

$$g_1 = \tfrac{1}{2}\Big(\tfrac{1}{R_x} + \tfrac{1}{R_z} - \tfrac{1}{R_y}\Big), \quad g_4 = \tfrac{1}{2}\Big(\tfrac{1}{R_x} + \tfrac{1}{R_y} - \tfrac{1}{R_z}\Big),$$

$$g_2 = \tfrac{1}{2}\Big(\tfrac{1}{R_y} + \tfrac{1}{R_z} - \tfrac{1}{R_x}\Big) - g_5.$$

R_5 уже известен из п. 1, поэтому его вклад вычитаем.

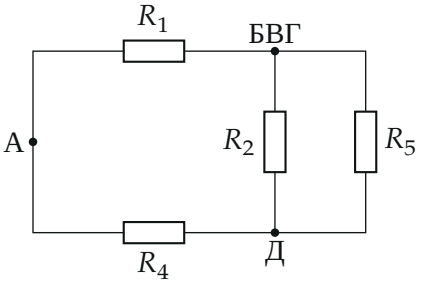


Рис. 3. Выводы Б, В, Г замкнуты: треугольник из R_1, R_4 и пары $R_2 \parallel R_5$.

3. Данные организаторов и расчёт. Измерено (кОм):

$R_а$	$R_б$	$R_в$	R_x	R_y	R_z
12,53	24,9	16,69	0,1239	0,242	0,1645

По формулам п. 1 и 2:

$$R_3 = 33{,}3, \quad R_5 = 20{,}1, \quad R_6 = 98{,}7 \text{ кОм},$$
$$R_1 = 0{,}1996, \quad R_4 = 0{,}327, \quad R_2 = 0{,}980 \text{ кОм}.$$

4. Погрешности. Относительная погрешность каждого показания 1%, значит, и у $1/R$ — 1%: $\Delta(1/R) = 0{,}01/R$. В формулах для g_i абсолютные погрешности складываются, например $\Delta g_3 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}01(\frac{1}{R_а} + \frac{1}{R_б} + \frac{1}{R_в})$, а $\Delta R = \Delta g/g^2$. Для g_2 добавляется ещё Δg_5. Получаем

$$R_1 = 0{,}200 \pm 0{,}004, \quad R_2 = 0{,}98 \pm 0{,}09, \quad R_4 = 0{,}33 \pm 0{,}01 \text{ кОм},$$
$$R_3 = 33 \pm 1, \quad R_5 = 20{,}1 \pm 0{,}4, \quad R_6 = 99 \pm 9 \text{ кОм}.$$

Хуже всего найдены R_6 и R_2: их проводимость — малая разность больших чисел.

Пункт 1. Наименьшее сопротивление — у $R_1 \approx 0{,}20$ кОм. Это видно и без расчёта: из трёх опытов с малыми резисторами R_x (там $R_1 \parallel R_4$) и R_z (там R_1) самые маленькие.

Пункт 3. Нужно $1/(167 \text{ Ом}) \approx 6{,}0$ мСм. Проводимости: $g_1 = 5{,}01$, $g_2 = 1{,}02$, $g_4 = 3{,}06$ мСм, у остальных $< 0{,}05$ мСм. Подходит $g_1 + g_2 = 6{,}03$ мСм, т. е. $R_1 \parallel R_2 = 166$ Ом. Обе стороны — от вывода Б (к А и к Д), поэтому замыкаем А, В, Г, Д в один узел и меряем между ним и Б (рис. 4). Параллельно добавится ещё R_3 (Б–В), но его вклад 0,03 мСм даёт сдвиг около 1 Ом. Итог ≈ 165 Ом — в пределах (167 ± 5) Ом. Заметим, что и опыт $R_z = 164{,}5$ Ом (А с Д, Б с В и Г) попадает в тот же интервал.

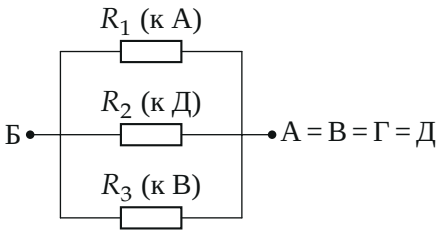


Рис. 4. Пункт 3: выводы А, В, Г, Д замкнуты, между ними и Б — $R_1 \parallel R_2 \parallel R_3 \approx 165$ Ом.

Обратите внимание. Измерять между двумя выводами без закорачивания бесполезно: каждый раз в цепи сразу все шесть резисторов, и решать придётся нелинейную систему. Закорачивание превращает её в линейную по проводимостям.

Проверка. Подстановка: $g_3 + g_5 = 0{,}0300 + 0{,}0498 = 0{,}0798\,\text{кОм}^{-1} = 1/(12{,}53\,\text{кОм})$ — совпадает с R_a. Предел: если бы $R_6 \to \infty$, получилось бы $R_6 = R_3$ — формула для g_6 дала бы ноль. У организаторов в таблице $R_3 = 33{,}5$, $R_5 = 20{,}5$, $R_6 = 97{,}1$ кОм — их же формулы с их же показаниями дают 33,3, 20,1 и 98,7 кОм.

Ответ. 1) R_1; 2) $R_1 = 0{,}200 \pm 0{,}004$ кОм, $R_2 = 0{,}98 \pm 0{,}09$ кОм, $R_3 = 33 \pm 1$ кОм, $R_4 = 0{,}33 \pm 0{,}01$ кОм, $R_5 = 20{,}1 \pm 0{,}4$ кОм, $R_6 = 99 \pm 9$ кОм (по данным организаторов); 3) замкнуть выводы А, В, Г, Д и мерить между ними и выводом Б: ≈ 165 Ом.