Зонд

Задача 1. [ВсОШ 2022/23, региональный этап, 10 класс, задача 1] «Зонд».

Экспериментатор Глюк сконструировал атмосферный зонд, состоящий из шара объёмом $V = 20$ м^3, заполненного гелием при давлении $p_0 = 100$ кПа и температуре $T_0 = 300$ К, и подвешенного к нему набора метеорологических датчиков.

1. При какой максимальной массе датчиков зонд сможет подняться на высоту 4 км?
2. На какую максимальную высоту сможет подняться такой шар без датчиков?

График зависимости давления воздуха от высоты над поверхностью земли представлен на рисунке. Считайте, что температура воздуха линейно уменьшается с высотой от 300 К (у поверхности Земли) до 220 К (на высоте 10 км). Оболочка шара является тонкой, нерастяжимой и непроницаемой для газов. Температуру газа внутри шара считать равной температуре окружающего воздуха. Объёмом датчиков при расчётах можно пренебречь. Масса оболочки шара равна $m_0 = 8$ кг, молярная масса гелия $M_г = 4$ г/моль, молярная масса воздуха $M_в = 29$ г/моль, универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(К·моль).



▲ **Решение. Что происходит.** Шар нерастяжим, поэтому его объём V постоянен, а гелий из него не уходит — масса гелия $m_г$ тоже постоянна.

Подъёмная сила — сила Архимеда $\rho_в g V$ — с высотой падает, потому что падает плотность воздуха $\rho_в = pM_в/(RT)$. Зонд поднимается, пока сила Архимеда больше силы тяжести, и останавливается там, где они сравнялись. Главная идея: условие равновесия на высоте h записать через плотность воздуха, а её — через $p(h)$ с графика и линейную $T(h)$.

Обозначения. h — высота, $p(h)$ — давление воздуха (график), $T(h)$ — температура воздуха и гелия, $m_д$ — масса датчиков; ось y — вверх.

1. Температура на высоте. Она падает линейно на $300 - 220 = 80$ К за 10 км, т. е. на $\beta = 8$ К/км:

$$T(h) = T_0 - \beta h, \qquad T_1 = T(4\text{ км}) = 300 - 8 \cdot 4 = 268\text{ К}.$$

2. Масса гелия. Уравнение Менделеева–Клапейрона для гелия у земли (давление и температура даны):

$$m_г = \frac{p_0 M_г V}{RT_0} = \frac{10^5 \cdot 0{,}004 \cdot 20}{8{,}31 \cdot 300}\text{ кг} \approx 3{,}21\text{ кг}.$$

При подъёме она не меняется — оболочка непроницаема. (Давление гелия на высоте устанавливается само: объём и масса заданы, температура равна температуре воздуха; для сил оно не нужно — оболочку растягивают силы, которых в балансе сил на зонд нет.)

3. Плотность воздуха. Из уравнения Менделеева–Клапейрона для воздуха

$$\rho_в(h) = \frac{p(h) M_в}{RT(h)}.$$

Пункт 1. Максимальная масса датчиков — та, при которой зонд на высоте $h_1 = 4$ км ещё находится в равновесии (с меньшей массой он поднимется выше). Второй закон Ньютона для зонда (шар с гелием + датчики) в проекции на ось y при равновесии (рис. 2): сила Архимеда уравновешивает силу тяжести

$$\rho_{в1} g V = (m_г + m_0 + m_д) g.$$

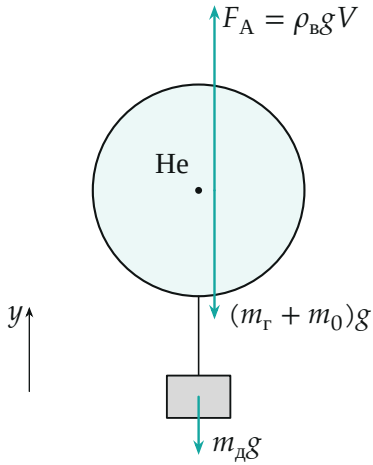

Рис. 2. Силы на зонд на высоте 4 км (длины стрелок пропорциональны силам: $16{,}1g$, $11{,}2g$ и $4{,}9g$ при массах в кг).

По графику $p_1 = p(4\text{ км}) \approx 62$ кПа, поэтому

$$\rho_{в1} = \frac{p_1 M_в}{RT_1} = \frac{62 \cdot 10^3 \cdot 0{,}029}{8{,}31 \cdot 268}\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \approx 0{,}81\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3},$$

$$m_д = \rho_{в1} V - m_г - m_0 = \frac{p_1 M_в V}{RT_1} - \frac{p_0 M_г V}{RT_0} - m_0 \approx 16{,}1 - 3{,}2 - 8 \approx 4{,}9\text{ кг}.$$

Пункт 2. Без датчиков шар поднимается до высоты, где

$$\rho_в(h) V = m_г + m_0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{p(h) M_в}{R(T_0 - \beta h)} = \frac{m_г + m_0}{V}.$$

Это уравнение с двумя неизвестными функциями высоты; удобно перенести всё, что известно, в одну сторону и получить *прямую* в координатах графика:

$$p(h) = \frac{(m_г + m_0)R}{M_в V}(T_0 - \beta h) \approx 48{,}2\text{ кПа} - 1{,}28\ \frac{\text{кПа}}{\text{км}} \cdot h.$$

Слева — давление воздуха (кривая графика), справа — давление, при котором плотность воздуха *как раз* даёт нужную силу Архимеда. Про-

водим эту прямую поверх графика (рис. 3) через точки $(0;\ 48{,}2)$ и $(10;\ 35{,}4)$: она пересекает кривую при

$$h_{\max} \approx 7{,}5 \text{ км}.$$

Ниже этой высоты кривая выше прямой — воздух плотнее нужного, шар поднимается; выше — наоборот.

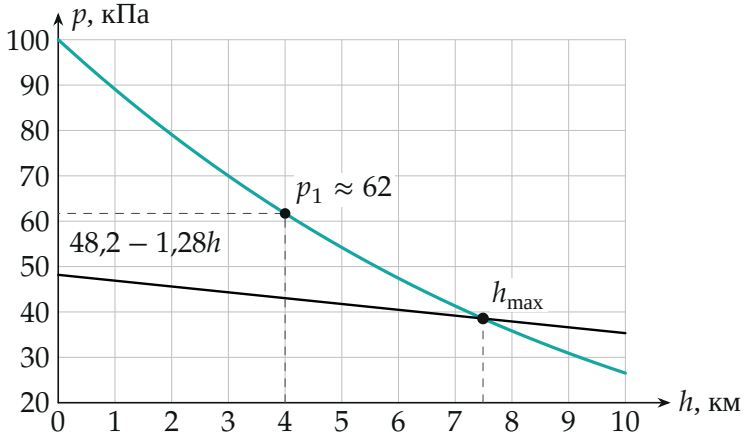

Рис. 3. Давление воздуха $p(h)$ (бирюзовая кривая) и прямая условия равновесия шара без датчиков; точка пересечения — $h_{\max} \approx 7{,}5$ км. Отмечено и давление p_1 на высоте 4 км.

Второй способ (рис. 4). Посчитаем плотность воздуха $\rho_{\text{в}} = pM_{\text{в}}/(RT)$ в точках графика и сравним её со «средней плотностью» зонда $(m_{\text{г}} + m_0)/V = 0{,}560$ кг/м^3 (без датчиков) и $(m_{\text{г}} + m_0 + m_{\text{д}})/V = 0{,}81$ кг/м^3 (с датчиками). Зонд поднимается, пока воздух плотнее его. Кривая $\rho_{\text{в}}(h)$ пересекает уровень 0,560 при 7,5 км и уровень 0,81 — при 4 км, оба ответа подтверждаются.

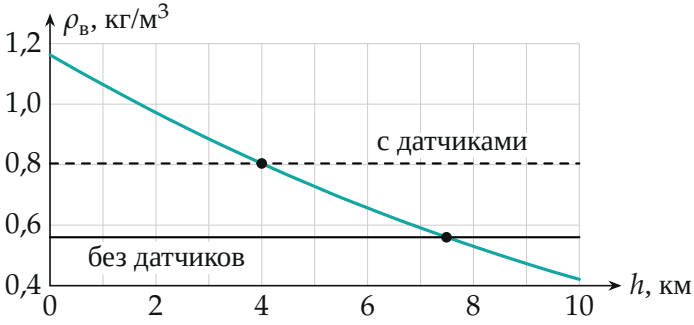

Рис. 4. Плотность воздуха по высоте и средняя плотность зонда: без датчиков (сплошная) и с предельными датчиками (пунктир).

Обратите внимание. Гелий внутри шара не «сжимается вместе с воздухом»: объём фиксирован оболочкой, и в условие равновесия входит только его масса, найденная у земли. Плотность же воздуха нужно считать с *местной* температурой $T(h)$: при T_0 вместо T_1 получилось бы $m_д \approx 3{,}2$ кг.

Проверка. Размерность: $pV/(RT)$ — моли (Па·м^3 = Дж), умноженные на M, — кг. Предел: на $h = 0$ шар поднял бы $\rho_в V - m_г - m_0 = 23{,}3 - 11{,}2 \approx 12$ кг — больше, чем на высоте 4 км, как и должно быть. Второй способ (рис. 4) дал те же числа. Точное решение уравнения с формулой $p(h)$, по которой построен график, даёт $h_{max} = 7{,}49$ км. У организаторов ответ $\approx 7{,}6$ км — снят с графика с точностью его клетки.

Ответ. 1) $m_д = \dfrac{p_1 M_в V}{RT_1} - \dfrac{p_0 M_г V}{RT_0} - m_0 \approx 4{,}9$ кг ($p_1 \approx 62$ кПа, $T_1 = 268$ К); 2) $h_{max} \approx 7{,}5$ км.