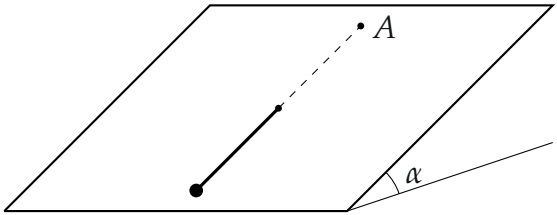
Наклонная плоскость

Задача 2. [ВсОШ 2022/23, региональный этап, 10 класс, задача 2] «Наклонная плоскость».

Жесткий невесомый стержень длины L лежит на шероховатой наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом. Один конец стержня шарнирно прикреплен к плоскости, а ко второму концу присоединен небольшой массивный груз. Изначально стержень расположен так, что груз находится в самой нижней точке.



1. Какую минимальную скорость v_1, направленную перпендикулярно стержню и вдоль плоскости, необходимо сообщить грузу, чтобы он, двигаясь вместе со стержнем, смог оказаться в точке, диаметрально противоположной начальной (в точке A)?
2. Какую минимальную скорость v_2, направленную перпендикулярно стержню и вдоль плоскости, необходимо сообщить грузу, чтобы он смог вернуться в исходную точку после одного полного оборота стержня?

Коэффициент трения между телом и наклонной плоскостью равен $\mu = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{2}$, трение между стержнем и плоскостью и трение в шарнире отсутствуют.

▲ **Решение. Что происходит.** Груз на жёстком стержне идёт по окружности радиуса L в плоскости склона. Его тормозят две силы: составляющая силы тяжести вдоль склона (на подъёме) и трение скольжения постоянной величины. Класс задачи — закон изменения механической энергии с работой трения $-F_{\text{тр}} \cdot S$. Главная тонкость второго пункта: самая маленькая скорость — не в верхней точке, а чуть дальше, где «скатывающая» составляющая силы тяжести ещё слабее трения.

Обозначения (рис. 2). O — шарнир, B — нижняя (начальная) точка, A — верхняя; φ — угол поворота стержня от OB; ось «вниз по склону» — линия наибольшего ската. Высота груза над точкой B: $h = L(1 - \cos\varphi)\sin\alpha$.

1. Силы и их работа. На груз действуют сила тяжести $m\vec{g}$, нормальная реакция плоскости $\vec{N}$, сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ и сила $\vec{T}$ со стороны стержня (вдоль стержня: стержень невесомый, трения в шарнире и о плоскость нет). Второй закон Ньютона в проекции на нормаль к плоскости: груз из плоскости не выходит, поэтому

$$N - mg\cos\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg\cos\alpha = \frac{mg\sin\alpha}{2}.$$

Трение постоянно по модулю и всегда против скорости, поэтому его работа на пути S равна $-F_{\text{тр}}S$. Силы $\vec{N}$ и $\vec{T}$ перпендикулярны скорости и работы не совершают.

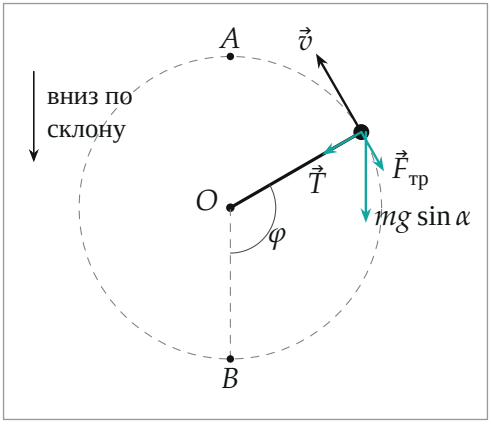


Рис. 2. Вид на плоскость склона сверху: груз на окружности радиуса L, силы в плоскости склона. $\vec{N}$ и $mg\cos\alpha$ перпендикулярны рисунку и уравновешены. Длины: $F_{тр} = \frac{1}{2}mg\sin\alpha$.

Пункт 1. Пока груз поднимается от B к A, обе силы вдоль скорости — составляющая тяжести и трение — тормозят его, скорость монотонно падает. Значит, минимальная начальная скорость — та, при которой груз останавливается ровно в A (там составляющая тяжести вдоль

окружности равна нулю, и трение покоя удержит груз). Закон изменения механической энергии груза от B до A (путь — полуокружность πL, подъём $2L\sin\alpha$):

$$\left(0 + mg\cdot 2L\sin\alpha\right) - \frac{mv_1^2}{2} = -\mu mg\cos\alpha\cdot\pi L.$$

Отсюда, с $\mu\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin\alpha$,

$$v_1^2 = 4gL\sin\alpha + 2\mu\pi gL\cos\alpha = (4+\pi)\,gL\sin\alpha,$$

$$v_1 = \sqrt{(4+\pi)gL\sin\alpha} \approx \sqrt{7{,}14\,gL\sin\alpha}.$$

Пункт 2.

2.1. Где скорость минимальна. Рассмотрим произвольную точку после A; β — угол стержня от OA (рис. 3). Второй закон Ньютона в проекции на направление скорости (касательная к окружности): составляющая тяжести $mg\sin\alpha\sin\beta$ теперь разгоняет, трение $\mu mg\cos\alpha$ тормозит,

$$ma_\tau = mg\sin\alpha\sin\beta - \mu mg\cos\alpha.$$

Сразу за A $\sin\beta$ мал, и груз продолжает тормозить; торможение кончается, когда $a_\tau = 0$:

$$\sin\beta_0 = \frac{\mu}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad \beta_0 = \frac{\pi}{6}.$$

Дальше, вплоть до нижней точки, где $\sin\beta < \frac{1}{2}$ снова, скорость успевает вырасти (рис. 4), и груз доходит до B. Значит, условие полного оборота — груз проходит точку β_0, а минимальная v_2 даёт в ней нулевую скорость (в этой точке трение покоя ещё удерживает груз, но любая большая скорость проводит его дальше).

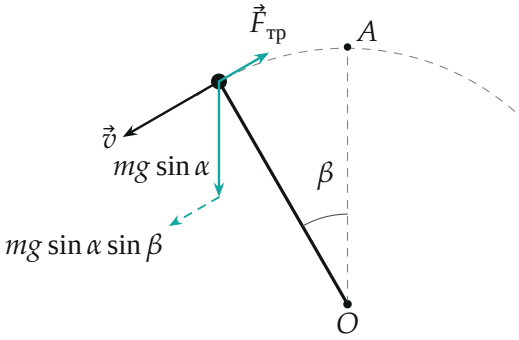


Рис. 3. Груз после верхней точки, $\beta = \pi/6$: касательная составляющая силы тяжести (пунктир) равна по модулю силе трения — скорость здесь минимальна.

2.2. Энергия. Закон изменения механической энергии от B до точки β_0: путь $(\pi + \beta_0)L$, высота над B равна $L(1 + \cos\beta_0)\sin\alpha$:

$$mgL(1 + \cos\beta_0)\sin\alpha - \frac{mv_2^2}{2} = -\mu mg\cos\alpha\,(\pi + \beta_0)L.$$

Подставляем $\cos\beta_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\mu\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin\alpha$:

$$v_2^2 = gL\sin\alpha\Big(2 + \sqrt{3} + \frac{7\pi}{6}\Big), \qquad v_2 \approx \sqrt{7{,}40\,gL\sin\alpha}.$$

2.3. Проверка всей траектории. Тот же закон для произвольного угла φ (от B, путь φL) даёт

$$\frac{v^2}{gL\sin\alpha} = \frac{v_0^2}{gL\sin\alpha} - 2(1 - \cos\varphi) - \varphi.$$

Для $v_0 = v_2$ эта функция (рис. 4) касается нуля ровно в $\varphi = 7\pi/6$ и дальше положительна — в B груз приходит со скоростью $v^2 \approx 1{,}11\,gL\sin\alpha$. Для $v_0 = v_1$ она обращается в ноль в A ($\varphi = \pi$) — груз там и остаётся.

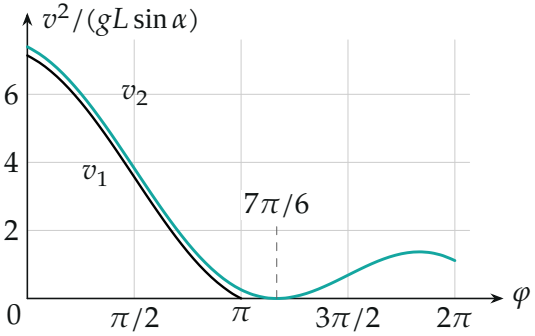


Рис. 4. Квадрат скорости груза в зависимости от угла поворота: при $v_0 = v_1$ (чёрная) груз останавливается в A, при $v_0 = v_2$ (бирюзовая) скорость касается нуля при $\varphi = 7\pi/6$ и снова растёт.

Обратите внимание. Остановка в верхней точке — не условие полного оборота: после A трение ещё сильнее скатывающей силы на дуге $\beta < \pi/6$, и груз с нулевой скоростью в A там и остался бы. Поэтому $v_2 > v_1$.

Проверка. Размерность: gL — м^2/с^2. Без трения ($\mu = 0$) $\beta_0 = 0$, и оба ответа совпали бы: $v^2 = 4gL\sin\alpha$, как для подъёма на высоту $2L\sin\alpha$. Разница $v_2^2 - v_1^2 = (\sqrt{3} - 2 + \pi/6)gL\sin\alpha \approx 0{,}26\,gL\sin\alpha > 0$ — такая же, как значение функции на рис. 4 в точке A для бирюзовой кривой.

Ответ.

1) $v_1 = \sqrt{(4+\pi)\,gL\sin\alpha} \approx \sqrt{7{,}14\,gL\sin\alpha}$;

2) $v_2 = \sqrt{\left(2 + \sqrt{3} + \dfrac{7\pi}{6}\right)gL\sin\alpha} \approx \sqrt{7{,}40\,gL\sin\alpha}$.