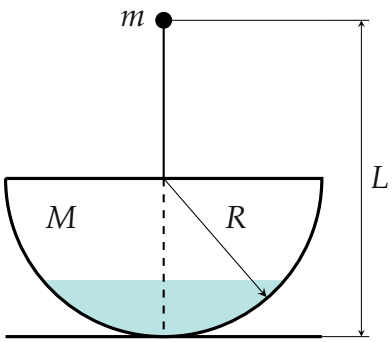
Волчок

Задача 3. [ВсОШ 2022/23, региональный этап, 10 класс, задача 3] «Волчок».

Волчок представляет собой тонкостенную однородную полусферу, к поверхности которой прикреплен тонкий невесомый стержень с закрепленным на его конце точечным телом. Стержень проходит через центр полусферы. Масса полусферы M, ее радиус R. Длина стержня $L = 2R$, масса точечного тела m. Волчок расположен на шероховатой горизонтальной поверхности.



Внутрь волчка налита вода плотностью ρ. Объем воды меньше объема полусферы. Трением воды о стенки полусферы можно пренебречь.

1. Докажите, что центр масс тонкостенной однородной полусферы расположен на расстоянии $R/2$ от ее центра.

При ответах на дальнейшие вопросы можете использовать факт из п. 1, даже если не смогли это доказать.

2. Волчок отклоняют так, что его стержень составляет малый угол α с вертикалью, и отпускают. Нарисуйте все силы, действующие на волчок (вода не считается частью волчка) сразу после того, как его отпустили.
3. Для случая $M = 6m$ определите при каких значениях объема воды в волчке его равновесие будет устойчивым.
4. Пусть объем воды внутри волчка равен половине объема полусферы. Определите при каких значениях M/m равновесие волчка будет устойчивым.

▲ **Решение. Что происходит.** Сферическое дно перекатывается по столу, и его центр O всё время остаётся на высоте R над столом — точно над точкой касания. Вода внутри — сферический «сегмент» с горизонтальной поверхностью, и при наклоне волчка её форма относительно O не меняется. Класс задачи — устойчивость равновесия: равновесие устойчиво, если при малом отклонении потенциальная энергия растёт. Главная идея: ни вода, ни реакция стола не влияют на то, растёт ли энергия, — всё решает, ниже или выше точки O центр масс полусферы с грузом.

Обозначения. O — центр полусферы, P — точка касания со столом, C_M — центр масс полусферы, C — центр масс полусферы вместе с грузом; ось x — вдоль стержня от O вниз, к дну.

Пункт 1. Центр масс полусферы. Разрежем полусферу плоскостями, параллельными основанию, на тонкие пояски высотой dx (рис. 2). Поясок, который виден из O под углом φ к плоскости основания, имеет радиус $r = R\cos\varphi$, а его образующая наклонена к оси x под углом φ, поэтому ширина пояска вдоль поверхности $dx/\cos\varphi$. Площадь пояска

$$dS = 2\pi R\cos\varphi\cdot\frac{dx}{\cos\varphi} = 2\pi R\,dx$$

не зависит от того, где поясок находится. Значит, масса оболочки распределена по оси x *равномерно*: каждому слою dx на отрезке от $x = 0$ до $x = R$ приходится одна и та же масса $M\,dx/R$, как у однородного стержня длины R. Центр масс такого «стержня» — в его середине:

$$x_{C_M} = \frac{R}{2}.$$

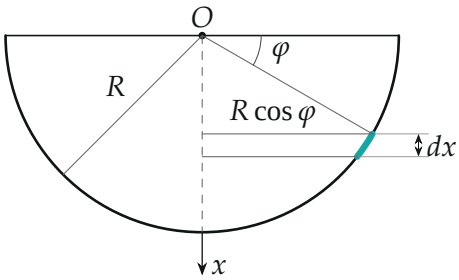


Рис. 2. Сечение полусферы: поясок (бирюзовый) высотой dx на угловой высоте φ; его радиус $R\cos\varphi$, ширина вдоль поверхности $dx/\cos\varphi$.

Пункт 2. Силы сразу после отпускания (рис. 3; стержень отклонён вправо, $M = 6m$ — случай, когда волчок возвращается).

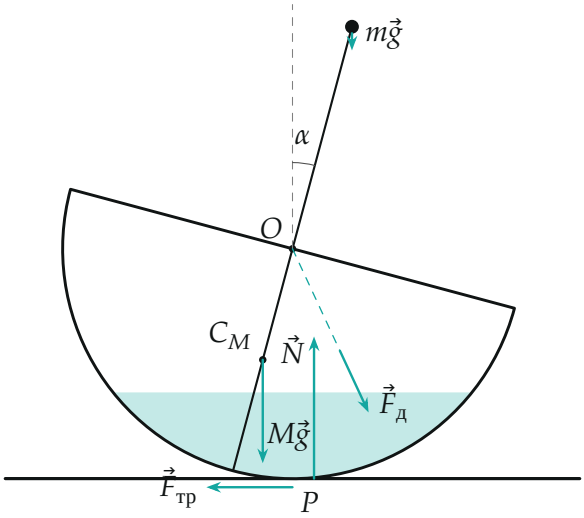


Рис. 3. Силы на волчок сразу после отпускания. Линия действия $\vec{F}_д$ (пунктир) проходит через O; $\vec{N}$ и $\vec{F}_{тр}$ приложены в точке касания P.

- $M\vec{g}$ — в точке C_M на оси, на $R/2$ ниже O; $m\vec{g}$ — в точке груза. Обе вертикально вниз.
- $\vec{N}$ — реакция стола в точке касания P, вертикально вверх. Точка P лежит точно под O: радиус в точку касания перпендикулярен столу.

- $\vec{F}_{\text{тр}}$ — сила трения покоя в точке P, горизонтальна. Волчок поворачивается обратно и катится влево; стенка толкает влево и воду. Вся система «волчок + вода» разгоняется влево, а единственная внешняя горизонтальная сила — трение, значит, $\vec{F}_{\text{тр}}$ направлена влево.
- $\vec{F}_{\text{д}}$ — равнодействующая сил давления воды. Давление в каждой точке направлено по нормали к сфере, т. е. по радиусу, поэтому $\vec{F}_{\text{д}}$ проходит через O. Она направлена вниз (вода давит своим весом) и вправо: стенка толкает воду влево, по третьему закону Ньютона вода толкает стенку вправо.

Пункт 3. Условие устойчивости.

3.1. Вода не влияет. Будем медленно наклонять волчок на угол α, прокатывая его по столу. Центр O остаётся на высоте R, поверхность воды горизонтальна, а объём воды тот же. Значит, вода по-прежнему занимает часть шара радиуса R с центром O ниже горизонтальной плоскости на той же глубине — ту же самую фигуру на той же высоте (рис. 4). Потенциальная энергия воды от α не зависит. Реакция стола и трение покоя работы не совершают — точка касания не скользит. **Обратите внимание:** поэтому воду нельзя считать частью «груза», понижающего центр масс.

3.2. Энергия полусферы с грузом. Их общий центр масс C лежит на оси на расстоянии

$$x_C = \frac{M \cdot \frac{R}{2} + m \cdot (-R)}{M + m} = \frac{(M/2 - m)R}{M + m}$$

от O (по оси x вниз; груз — на R выше O, потому что $L = 2R$ отсчитывается от дна). При наклоне на угол α высота C над столом $R - x_C \cos\alpha$, и потенциальная энергия системы

$$U(\alpha) = \text{const} - (M + m)g\, x_C \cos\alpha.$$

При $x_C > 0$ (центр масс ниже O) U минимальна при $\alpha = 0$ — равновесие устойчиво; при $x_C < 0$ — максимальна, неустойчиво. То же видно по моментам относительно O (рис. 4): давление воды и $\vec{N}$ проходят че-

рез O, а вес $(M+m)\vec{g}$ на плече $x_C \sin\alpha$ поворачивает волчок обратно, если C ниже O (трение лишь согласует поворот с качением).

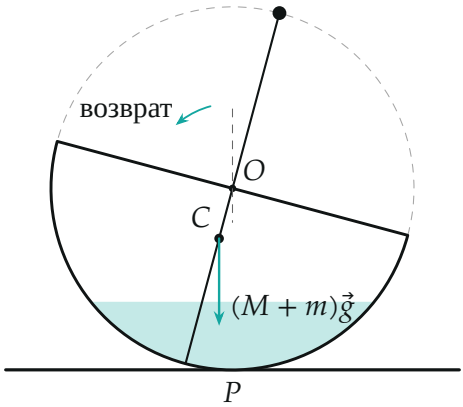


Рис. 4. Вода занимает ту же часть шара (пунктир); центр масс C левее вертикали через O, вес возвращает волчок ($M = 6m$).

3.3. Случай $M = 6m$.

$$x_C = \frac{(3m-m)R}{7m} = \frac{2R}{7} > 0,$$

центр масс ниже O, и равновесие устойчиво *при любом объёме воды* (меньшем объёма полусферы, как в условии).

Пункт 4. Вода снова не важна (её объём — половина объёма полусферы, край выше уровня). Условие $x_C > 0$:

$$\frac{M}{2} - m > 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{M}{m} > 2.$$

Проверка. Предел $m \to 0$: пустая полусфера с центром масс ниже O устойчива — как и ожидается для чаши на столе ($M/m \to \infty > 2$). Граница $M = 2m$: момент полусферы $M \cdot \frac{R}{2}$ и груза $m \cdot R$ относительно O равны — безразличное равновесие. Пункт 1 вторым способом: интеграл $x_{C_M} = \frac{1}{2\pi R^2}\int_0^R x \cdot 2\pi R\, dx = \frac{R}{2}$.

Ответ. 1) $x_{C_M} = R/2$ (пояски равной высоты имеют равную площадь); 2) $M\vec{g}$, $m\vec{g}$, $\vec{N}$, $\vec{F}_{\text{тр}}$, $\vec{F}_{\text{д}}$ — рис. 3; 3) при любом объёме воды; 4) $M/m > 2$.