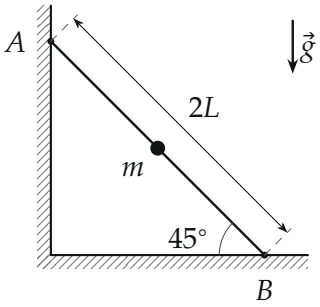
Бусинка на стержне

Задача 4. [ВсОШ 2022/23, региональный этап, 10 класс, задача 4] «Бусинка на стержне».

Твердый невесомый стержень длиной $2L$ опирается концом A на гладкую вертикальную стенку, а концом B на горизонтальную шероховатую поверхность. Коэффициент трения между стержнем и горизонтальной поверхностью — μ. По стержню может без трения скользить маленькая бусинка массой m. Тела удерживают так, что стержень расположен под углом $\alpha = 45°$ к горизонту, а бусинка находится посередине стержня. Тела отпускают, и через некоторое время стержень приходит в движение, при этом бусинка к этому моменту времени не успевает удариться о горизонтальную поверхность.



1. Найдите скорость бусинки в момент времени, когда стержень начнет двигаться, и все значения коэффициента трения μ, при которых возможна описанная в условии ситуация.
2. Найдите силу взаимодействия стержня с вертикальной стенкой в этот момент времени.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Пока стержень стоит, бусинка скользит по неподвижной гладкой наклонной прямой — равноускоренно, и давит на стержень всё время одной и той же силой, перпендикулярной ему. Меняется только точка приложения этой силы: она ползёт к концу B. Стержень невесом, поэтому в каждый момент силы на него уравновешены. Класс задачи — статика с «порогом»: записываем равновесие стержня как функцию положения бусинки и ищем, когда трению на полу перестанет хватать.

Обозначения (рис. 2, 3). x — смещение бусинки вдоль стержня от середины к B (расстояние от бусинки до B равно $L - x$); $\vec{N}_\text{Б}$ — сила, с которой бусинка давит на стержень; $\vec{N}_A$ — реакция стенки, $\vec{N}_B$ — нормальная реакция пола, $\vec{F}_\text{тр}$ — трение покоя на полу. Проекции берём на горизонталь (от стенки) и вертикаль (вверх).

1. Бусинка. Второй закон Ньютона для бусинки (стержень неподвижен) в проекциях на перпендикуляр к стержню и вдоль него вниз (рис. 2):

$$N - mg\cos 45^\circ = 0 \;\Rightarrow\; N = N_\text{Б} = \frac{mg}{\sqrt{2}}, \qquad ma = mg\sin 45^\circ \;\Rightarrow\; a = \frac{g}{\sqrt{2}}.$$

По третьему закону Ньютона бусинка давит на стержень силой $N_\text{Б} = mg/\sqrt{2}$ вниз-влево, перпендикулярно стержню, — постоянной, пока стержень стоит.

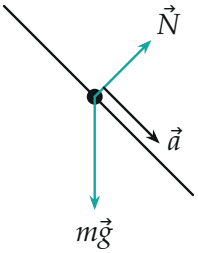


Рис. 2. Силы на бусинку: $N = mg\cos 45^\circ$, ускорение $g\sin 45^\circ$ вдоль стержня.

2. Равновесие стержня. Стержень невесом, поэтому сумма сил и сумма моментов сил на него равны нулю (рис. 3). Правило моментов относительно точки B — там приложены две неизвестные силы $\vec{N}_B$ и $\vec{F}_\text{тр}$, их моменты равны нулю. Плечо $N_\text{Б}$ — расстояние $L - x$ вдоль стержня (сила перпендикулярна стержню), плечо N_A — высота точки A, $2L\sin 45^\circ = \sqrt{2}L$:

$$N_\text{Б}(L - x) = N_A\sqrt{2}L \quad\Rightarrow\quad N_A = \frac{mg}{2}\left(1 - \frac{x}{L}\right).$$

Второй закон Ньютона для стержня (масса ноль) в проекциях:

$$\text{гор.}: \; N_A + F_\text{тр} - \frac{N_\text{Б}}{\sqrt{2}} = 0, \qquad \text{верт.}: \; N_B - \frac{N_\text{Б}}{\sqrt{2}} = 0,$$

откуда

$$N_B = \frac{mg}{2}, \qquad F_{\text{тр}} = \frac{mg}{2} - N_A = \frac{mg}{2} \cdot \frac{x}{L}.$$

Знак $F_{\text{тр}} > 0$: трение направлено от стенки — нижний конец стремится съехать к стенке.

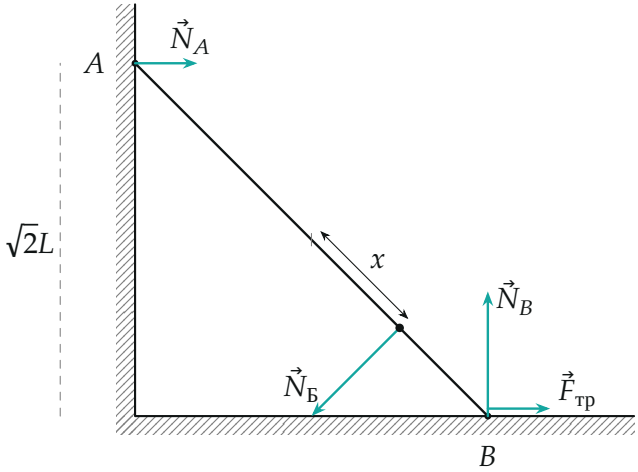


Рис. 3. Силы на стержень при $x = L/2$ (длины в масштабе): $N_A = \frac{1}{4}mg$, $N_Б = \frac{1}{\sqrt{2}}mg$, $N_B = \frac{1}{2}mg$, $F_{тр} = \frac{1}{4}mg$. Штрих — середина стержня, от бусинки до B расстояние $L - x$.

3. Когда стержень сдвинется. Нормальная реакция пола постоянна, $N_B = mg/2$, а нужное трение растёт пропорционально x (рис. 4). Трение покоя не может превысить μN_B, поэтому скольжение начнётся при

$$\frac{mg}{2} \cdot \frac{x}{L} = \mu \frac{mg}{2} \quad \Rightarrow \quad x_* = \mu L.$$

Есть и другой способ «прийти в движение» — поворот вокруг B с отрывом от стенки, когда N_A обратится в ноль. Это случилось бы при $x = L$, т. е. когда бусинка уже у пола. Значит, раньше удара бусинки стержень может только проскользнуть, и для этого нужно $x_* < L$:

$$0 < \mu < 1.$$

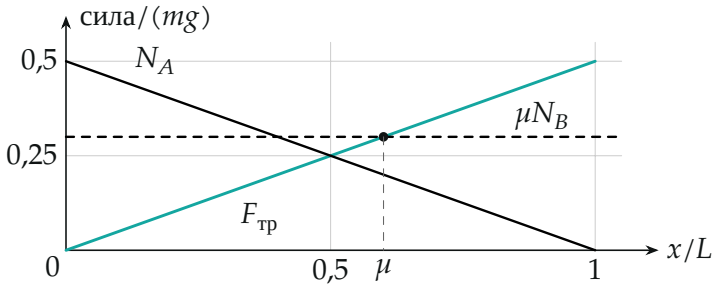


Рис. 4. Нужное трение $F_{тр}$ и реакция стенки N_A в зависимости от смещения бусинки; предел трения $\mu N_B = \mu mg/2$ (пунктир, $\mu = 0{,}6$). Скольжение — при $x = \mu L$, раньше чем N_A обратится в ноль.

4. Скорость бусинки. До этого момента бусинка шла равноускоренно с $a = g/\sqrt{2}$ из покоя и прошла путь x_*:

$$v^2 = 2ax_* = 2 \cdot \frac{g}{\sqrt{2}} \cdot \mu L \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\sqrt{2}\,\mu g L}.$$

Второй способ — закон сохранения энергии (стержень неподвижен, его сила работы не совершает): бусинка опустилась на $x_* \sin 45°$, $\frac{mv^2}{2} = mg\frac{\mu L}{\sqrt{2}}$ — то же.

5. Сила со стороны стенки. Подставляем $x_* = \mu L$ в $N_A(x)$:

$$N_A = \frac{mg}{2}(1 - \mu).$$

Второй способ: три силы. На стержень действуют три силы: $\vec{N}_A$, $\vec{N}_Б$ и полная реакция пола $\vec{Q}_B = \vec{N}_B + \vec{F}_{тр}$. Тело под действием трёх непараллельных сил в равновесии, только если их линии действия пересекаются в одной точке K (рис. 5). Линия $\vec{N}_A$ — горизонталь на высоте $\sqrt{2}L$, линия $\vec{N}_Б$ идёт под 45° через бусинку, поэтому при смещении бусинки на x точка K уезжает по горизонтали на $x\sqrt{2}$ от положения K_0 над точкой

B. Угол φ полной реакции с вертикалью:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{2}L} = \frac{x}{L}.$$

Трение покоя удерживает, пока $\operatorname{tg}\varphi \le \mu$, — снова $x_* = \mu L$. Треугольник сил ($\vec{N}_\text{Б}$ постоянна, $\vec{Q}_B$ под углом φ к вертикали, $\vec{N}_A$ горизонтальна): вертикальная составляющая Q_B равна $N_\text{Б}/\sqrt{2} = mg/2$, горизонтальные $N_A + \frac{mg}{2}\operatorname{tg}\varphi = \frac{mg}{2}$, откуда $N_A = \frac{mg}{2}(1-\mu)$.

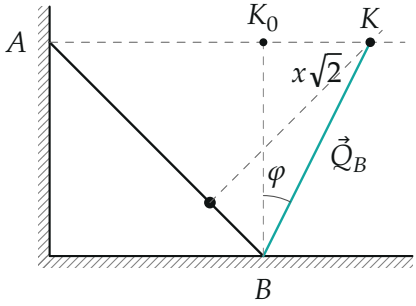


Рис. 5. Линии действия трёх сил пересекаются в точке K; по мере сползания бусинки K уходит вправо, и полная реакция пола $\vec{Q}_B$ наклоняется на угол φ, $\operatorname{tg}\varphi = x/L$ (показано $x = L/2$).

Обратите внимание. Скорость бусинки нельзя искать как скорость падения с высоты: путь вдоль стержня μL, а опускание — только $\mu L/\sqrt{2}$.

Проверка. Размерность: $\sqrt{gL}$ — скорость. Пределы: при $\mu \to 0$ стержень сдвигается сразу ($x_* = 0$, $v = 0$), и $N_A = mg/2$ — равновесие с бусинкой посередине без трения. При $\mu \to 1$ бусинка доходит до B, $N_A \to 0$ — скольжение и отрыв от стенки совпадают. Сумма $N_A + F_\text{тр} = mg/2$ при любом x — горизонтальная составляющая постоянного $\vec{N}_\text{Б}$.

Ответ. 1) $v = \sqrt{\sqrt{2}\,\mu g L}$, ситуация возможна при $0 < \mu < 1$; 2) $N_A = mg(1-\mu)/2$.