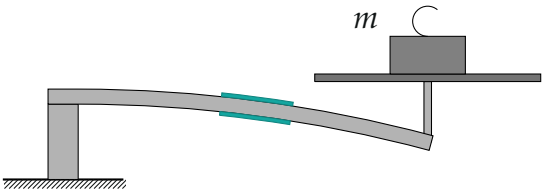
Весы

Задача 5. [ВсОШ 2022/23, региональный этап, 10 класс, задача 5] «Весы».

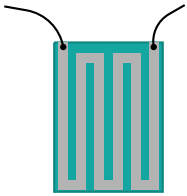
В этой задаче вам предлагается изучить работу электронных весов. Принцип их работы, как и у пружинных весов, основан на измерении деформации тела под механической нагрузкой. Деформируемым телом является балка прямоугольного сечения, прикрепленная одним концом к корпусу весов, а другим к платформе, на которую устанавливается измеряемый груз. Толщина балки d. Под нагрузкой балка изгибается. Измерение деформации производится с помощью двух одинаковых тензорезисторов №1 и №2, жестко приклеенных на верхнюю и нижнюю части балки соответственно. То есть при деформации балки длина резистора изменяется также, как длина участка поверхности, на который он приклеен.



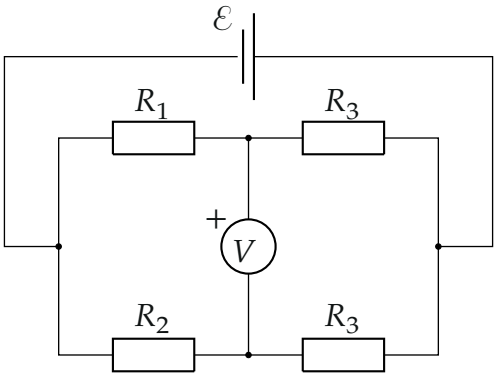
Тензорезистор представляет змейку из проводящей фольги, наклеенную на поверхность балки. При деформации балки фольга растягивается или сжимается, за счет чего ее сопротивление соответственно увеличивается или уменьшается. Зависимость сопротивления тензорезистора от относительного удлинения (сжатия) ε поверхности, на которую он приклеен, задается выражением:

$$R_{1,2} = R_0(1 + k\varepsilon),$$

где R_0 — сопротивление при отсутствии деформации, k — тензометрический коэффициент. Величина k лежит в пределах от 1 до 2.



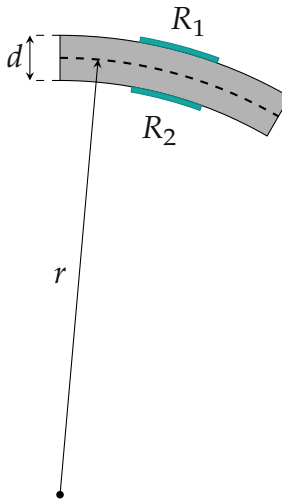
Тензорезисторы включены в электрическую цепь с двумя обычными резисторами R_3, источником постоянного напряжения и вольтметром. Сопротивления резисторов R_3 равны R_0 (сопротивлению тензорезистора при отсутствии деформации).



Когда на платформу весов ставят груз, балка изгибается, при этом верхняя часть балки растягивается, а нижняя сжимается. Некоторая линия внутри балки остается недеформируемой (в дальнейшем недеформируемая линия), то есть ее длина при изгибе балки остается неизменной. Участок балки, к которому приклеены тензорезисторы, можно представить в виде дуги окружности. Радиус кривизны недеформируемой линии в месте крепления тензорезисторов обратно пропорционален массе груза m, поставленного на платформу весов:

$$r = \frac{\alpha}{m},$$

где α — некоторый известный коэффициент. При этом значение радиуса кривизны много больше толщины балки, и изменением толщины балки можно пренебречь.



Массу платформы и балки в рассматриваемой модели учитывать не будем. Вольтметр будем считать идеальным.

Предположим, что недеформируемая линия проходит через середину балки.

1. Выразите величину относительной деформации ε_1 тензорезистора №1 через величины r и d.
2. Выразите величину относительной деформации ε_2 тензорезистора №2 через величины r и d.

Зависимость величины показаний вольтметра от массы поставленного на платформу груза с учетом малости деформации балки может быть представлена в виде:

$$U = \gamma m^n,$$

где n — целое число, γ — коэффициент пропорциональности.

3. Определите n и γ.
4. Теперь предположим, что недеформируемая линия проходит на расстоянии $x = d/4$ от верхней поверхности балки. Рассчитайте в этом случае показания вольтметра при установке на платформу груза массой m.
5. Весы перенесли в более теплое помещение, из-за этого они нагре-

лись. В процессе нагрева весов балка изменила свою длину, ее относительная деформация составила ε_3 (порядка величин ε_1, ε_2). Изменением толщины и ширины балки можно пренебречь. Рассчитайте в этом случае показания вольтметра при установке на платформу груза массой m. (Недеформируемая линия проходит посередине балки.)

При решении задачи считайте известными величины: $\mathcal{E}$ — напряжение источника питания; k — тензометрический коэффициент резисторов №1 и №2; m — масса груза, установленного на весы; α — коэффициент пропорциональности между радиусом кривизны балки в месте крепления резисторов и массой груза в минус первой степени; d — толщина деформируемой балки; ε_3 — относительное удлинение балки при ее нагреве. Величину сопротивления резисторов R_0 считайте НЕизвестной.

▲ **Решение. Что происходит.** Изгиб превращает массу груза в кривизну балки, кривизна — в растяжение верхнего резистора и сжатие нижнего, а мост из четырёх резисторов — в напряжение. Главная идея — геометрия дуги: слои балки поворачиваются на один и тот же угол, поэтому удлинение слоя пропорционально его расстоянию от недеформируемой линии. Вторая идея — мост реагирует на *разность* относительных изменений R_1 и R_2, поэтому общий сдвиг (нагрев) и положение недеформируемой линии из ответа выпадают.

Обозначения. β — угол, под которым резистор виден из центра кривизны C; l_0 — длина резистора без нагрузки; $\Delta R_{1,2} = R_{1,2} - R_0$; a и b — узлы моста, к которым подключён вольтметр (рис. 6).

Пункт 1. Без нагрузки длина резистора №1 равна l_0. Под нагрузкой проведём из центра кривизны C лучи к концам резистора (рис. 5); угол между ними β. Недеформируемая линия на радиусе r своей длины не меняет, поэтому её дуга между лучами по-прежнему $l_0 = \beta r$. Верхняя поверхность лежит на радиусе $r + \frac{d}{2}$, и резистор, приклеенный к ней, теперь имеет длину $l_1 = \beta(r + \frac{d}{2})$:

$$\varepsilon_1 = \frac{l_1 - l_0}{l_0} = \frac{\beta(r + d/2) - \beta r}{\beta r} = \frac{d}{2r}.$$

Пункт 2. Нижняя поверхность — на радиусе $r - \frac{d}{2}$, длина $\beta(r - \frac{d}{2})$:

$$\varepsilon_2 = -\frac{d}{2r}.$$

Минус: резистор №2 сжат.

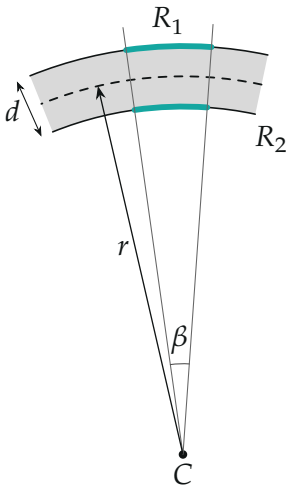


Рис. 5. Участок балки как дуга окружности с центром C: недеформируемая линия (пунктир) на радиусе r, резистор №1 — на $r + \frac{d}{2}$, №2 — на $r - \frac{d}{2}$; все три дуги стягивает один угол β (толщина преувеличена).

Пункт 3.

3.1. Сопротивления. По формуле тензорезистора

$$R_1 = R_0\Big(1 + \frac{kd}{2r}\Big), \qquad R_2 = R_0\Big(1 - \frac{kd}{2r}\Big), \qquad \frac{\Delta R_{1,2}}{R_0} = \pm\frac{kd}{2r} \ll 1.$$

3.2. Мост. Вольтметр идеален, ток через него не идёт, поэтому верхняя ветвь R_1–R_3 и нижняя R_2–R_3 — два независимых делителя напряжения, к каждому приложено $\mathcal{E}$ (рис. 6). Закон Ома для ветвей: $I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_0}$, $I_2 = \frac{\mathcal{E}}{R_2 + R_0}$. Отсчитаем потенциалы от правого узла; тогда потенциалы узлов a и b — напряжения на правых резисторах $R_3 = R_0$,

и вольтметр показывает их разность:

$$U = I_2R_0 - I_1R_0 = \mathcal{E}R_0\Big(\frac{1}{R_2+R_0} - \frac{1}{R_1+R_0}\Big),$$

$$U = \frac{\mathcal{E}R_0(\Delta R_1 - \Delta R_2)}{(2R_0+\Delta R_1)(2R_0+\Delta R_2)}.$$

Деформации малы, $\Delta R \ll R_0$, поэтому в знаменателе оставляем $4R_0^2$:

$$U \approx \frac{\mathcal{E}}{4}\cdot\frac{\Delta R_1 - \Delta R_2}{R_0} = \frac{\mathcal{E}k}{4}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2).$$

Неизвестное R_0 сократилось — так и задумано.

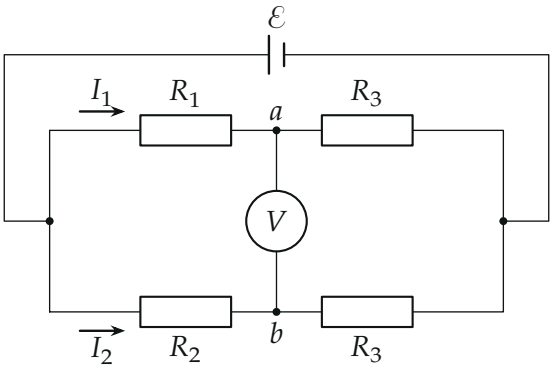


Рис. 6. Мост: две ветви-делителя, вольтметр между их средними точками a и b.

3.3. Ответ пункта. Подставляем $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \frac{d}{r}$ и $r = \frac{\alpha}{m}$:

$$U = \frac{\mathcal{E}kd}{4r} = \frac{\mathcal{E}kd}{4\alpha}\,m, \qquad n = 1, \quad \gamma = \frac{\mathcal{E}kd}{4\alpha}.$$

Показания пропорциональны массе — весы линейны.

Пункт 4. Пусть недеформируемая линия на расстоянии x от верха. Тот же довод с лучами из C: верхний резистор на радиусе $r + x$, нижний

на $r-(d-x)$ (рис. 7):

$$\varepsilon_1=\frac{x}{r},\qquad \varepsilon_2=-\frac{d-x}{r},\qquad \varepsilon_1-\varepsilon_2=\frac{d}{r}.$$

При $x=d/4$: $\varepsilon_1=\frac{d}{4r}$, $\varepsilon_2=-\frac{3d}{4r}$, а разность прежняя, поэтому

$$U'=\frac{\mathcal{E}k}{4}\cdot\frac{d}{r}=\frac{\mathcal{E}kdm}{4\alpha}=U,$$

показания не изменились.

Пункт 5. Нагрев добавляет к деформации каждого слоя одно и то же ε_3 (толщина не меняется, балка удлиняется целиком):

$$\varepsilon_1=\frac{d}{2r}+\varepsilon_3,\qquad \varepsilon_2=-\frac{d}{2r}+\varepsilon_3,\qquad \varepsilon_1-\varepsilon_2=\frac{d}{r},$$

$$U''=\frac{\mathcal{E}kdm}{4\alpha}=U.$$

Обе поправки сдвигают деформации обоих резисторов на одну и ту же величину (рис. 7), а мост чувствует только разность.

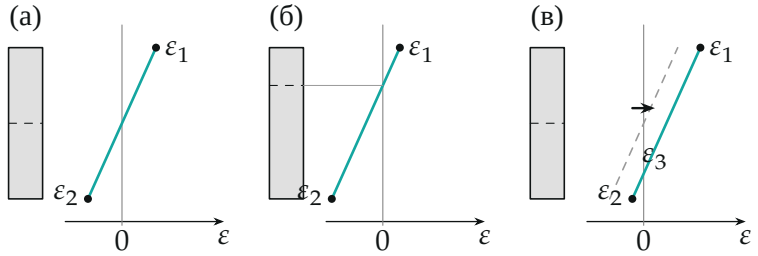


Рис. 7. Деформация по толщине балки линейна: (а) недеформируемая линия посередине; (б) на $d/4$ от верха — прямая та же по наклону, сдвинута; (в) нагрев сдвигает всю прямую на ε_3. Разность $\varepsilon_1-\varepsilon_2=d/r$ (наклон прямой) везде одна.

Обратите внимание. Положение недеформируемой линии и нагрев меняют каждое ε по отдельности, но не их разность. Ответ не изменится только в линейном приближении: точная формула моста содержит

$(2R_0 + \Delta R_1)(2R_0 + \Delta R_2)$ в знаменателе, и поправка порядка ε^2 отбрасывается вместе с прочими малыми величинами.

Проверка. Размерность: $\alpha = rm$ — кг·м, $\frac{\mathcal{E}kdm}{4\alpha}$ — вольты. Предел: $m \to 0$ — балка прямая ($r \to \infty$), мост сбалансирован, $U = 0$. Второй способ для моста: при $\Delta R_1 = -\Delta R_2 = \Delta R$ точная формула $U = \frac{2\mathcal{E}R_0\Delta R}{4R_0^2 - \Delta R^2} \approx \frac{\mathcal{E}\Delta R}{2R_0} = \frac{\mathcal{E}kd}{4r}$ — то же. Смысл: такой «полумост» с резисторами по обе стороны балки удваивает чувствительность и сам компенсирует нагрев.

Ответ. 1) $\varepsilon_1 = \dfrac{d}{2r}$; 2) $\varepsilon_2 = -\dfrac{d}{2r}$; 3) $n = 1$, $\gamma = \dfrac{\mathcal{E}kd}{4\alpha}$; 4) $U' = \dfrac{\mathcal{E}kdm}{4\alpha}$ — показания не изменятся; 5) $U'' = \dfrac{\mathcal{E}kdm}{4\alpha}$ — показания не изменятся.