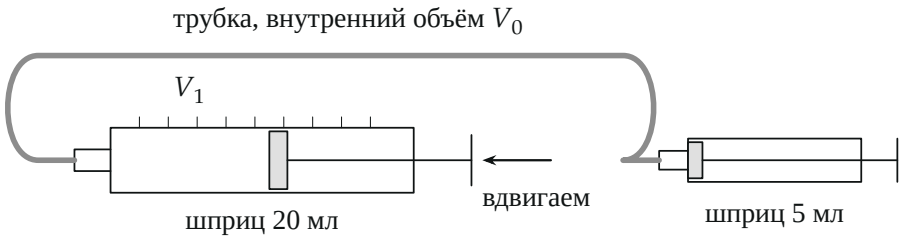
Внутренний объём трубки

Задача 1. [ВсОШ 2022/23, региональный этап, 11 класс, задача 1] «Внутренний объём трубки».

Оборудование: два шприца (20 мл и 5 мл) с «неизвлекаемыми» поршнями, прозрачная трубка, миллиметровая бумага для построения графика, отрезок равномерной шкалы, скотч и ножницы (выдаются по требованию).

Определите внутренний объём выданной вам прозрачной трубки и оцените его погрешность.

Примечание. 1. ВАЖНО! Запрещается разбирать шприцы (извлекать из них поршни)! Такие методы будут оценены в 0 баллов. 2. Миллиметровка может быть использована только для построения графиков. Вы не можете пользоваться ей в качестве измерительного инструмента.



Поясняющий рисунок: шприцы соединены трубкой; поршень малого шприца вдвинут до упора.

▲ **Решение. Что происходит.** Воздух в большом шприце, трубке и малом шприце заперт. Вдвигая поршень большого шприца, мы изотермически сжимаем его, давление растёт. Поршень малого шприца сидит в крайнем положении с небольшим «защёлкиванием» и сдвигается, только когда избыточное давление достигает одного и того же порога ΔP. Значит, каждый опыт кончается одним и тем же давлением $P_0 + \Delta P$, и закон Бойля–Мариотта связывает начальный и конечный объёмы. Неизвестный объём трубки V_0 входит в оба, и его даёт линейная зависимость, продолженная до пересечения с осью — типичный приём «экстраполяции к нулю».

Обозначения. V_1 — объём воздуха в большом шприце по его шкале в начале (давление P_0), V_2 — в момент, когда сдвинулся поршень малого шприца (давление $P_0 + \Delta P$), $\Delta V = V_1 - V_2$; V_0 — объём трубки (вместе с носиками шприцев); малый шприц в крайнем положении объёма не добавляет.

1. Шкала. Шкала большого шприца грубая, поэтому наклеим на него отрезок равномерной шкалы, совместив её основное деление с нулём шприца, а цену деления найдём по отметкам 0 и 20 мл. Так объёмы читаются с точностью около 0,2 мл.

2. Закон Бойля–Мариотта для воздуха в шприцах и трубке между началом опыта и моментом срыва поршня (масса воздуха и температура неизменны, сжатие медленное):

$$P_0(V_1 + V_0) = (P_0 + \Delta P)(V_2 + V_0).$$

Выразим $V_2 + V_0$ и вычтем из $V_1 + V_0$:

$$\Delta V = V_1 - V_2 = \frac{\Delta P}{P_0 + \Delta P}(V_1 + V_0) = k(V_1 + V_0), \qquad k = \frac{\Delta P}{P_0 + \Delta P}.$$

Порог ΔP от V_1 не зависит, поэтому k — постоянная, и ΔV — линейная функция V_1. Прямая обращается в ноль при $V_1 = -V_0$: *продолжение графика отсекает на оси V_1 отрезок, равный объёму трубки* (рис. 2).

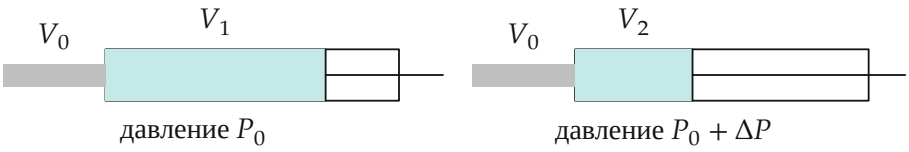


Рис. 2. Начало опыта и момент срыва поршня малого шприца: та же масса воздуха занимает $V_1 + V_0$ при P_0 и $V_2 + V_0$ при $P_0 + \Delta P$.

3. Измерения. Выдвигаем поршень большого шприца до отметки V_1, малый вдвигаем до упора, соединяем трубкой. Плавно вдвигаем большой поршень и отмечаем V_2 в момент, когда малый поршень «выскакивает». Каждый опыт повторяем три раза и усредняем: $\Delta V_{ср} = V_1 -$

$\frac{1}{3}(V_{2,1} + V_{2,2} + V_{2,3})$. Результаты организаторов:

V_1, мл	$V_{2,1}$, мл	$V_{2,2}$, мл	$V_{2,3}$, мл	$\Delta V_{ср}$, мл
20,0	9,5	9,3	9,5	10,6
17,0	8,0	8,2	8,0	8,9
15,0	6,5	6,5	6,7	8,4
13,0	5,7	5,5	5,5	7,4
10,0	4,0	3,7	4,0	6,1
8,0	2,5	2,5	2,5	5,5
5,0	1,0	1,0	1,0	4,0

Разброс повторов ($\leq 0{,}3$ мл) не больше цены деления 0,2 мл с округлением, так что погрешность каждой точки $\Delta V_{ср}$ — около 0,2 мл.

4. Обработка. Точки ложатся на прямую (рис. 3) — модель с постоянным порогом ΔP подтверждается. Метод наименьших квадратов по семи точкам даёт

$$\Delta V = kV_1 + b, \qquad k = 0{,}426 \pm 0{,}012, \quad b = (1{,}92 \pm 0{,}16)\ \text{мл}.$$

Из $\Delta V = k(V_1 + V_0)$ видно, что $b = kV_0$, откуда

$$V_0 = \frac{b}{k} = \frac{1{,}92}{0{,}426} \approx 4{,}5\ \text{мл}.$$

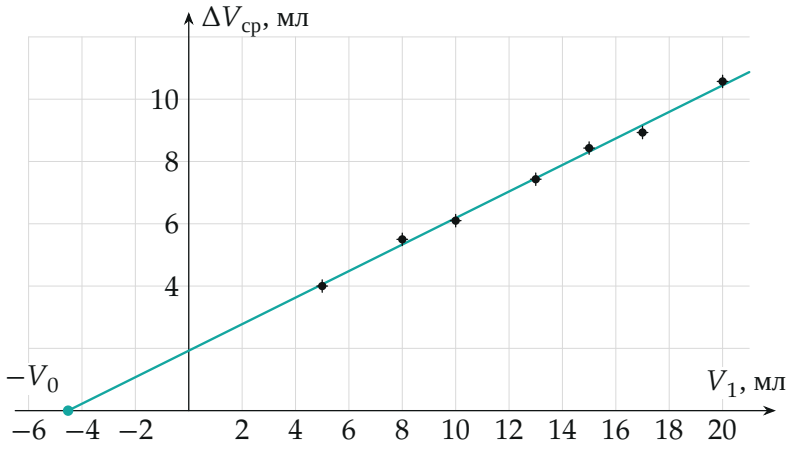


Рис. 3. Зависимость $\Delta V_{ср}(V_1)$: точки опыта с крестами погрешностей $\pm 0{,}2$ мл и прямая наименьших квадратов; её продолжение пересекает ось V_1 в точке $-V_0 \approx -4{,}5$ мл.

5. Погрешность. Случайная часть — из разброса точек около прямой. Ошибки b и k в МНК связаны (поворот прямой вокруг центра точек меняет обе), поэтому погрешность отношения $V_0 = b/k$ считаем с учётом этой связи; получается $\Delta V_0^{сл} \approx 0{,}5$ мл. Систематическая часть — сдвиг нуля наклеенной шкалы на цену деления 0,2 мл: он не меняет ΔV, но сдвигает все V_1 и прямо даёт $\pm 0{,}2$ мл в V_0. Итого

$$\Delta V_0 = \sqrt{0{,}5^2 + 0{,}2^2} \approx 0{,}6 \text{ мл}.$$

Тот же результат даёт графический способ: две крайние прямые через края крестов ошибок (рис. 4) пересекают ось V_1 при $-5{,}0$ и $-3{,}8$ мл, откуда $\Delta V_0 = (5{,}0 - 3{,}8)/2 = 0{,}6$ мл.

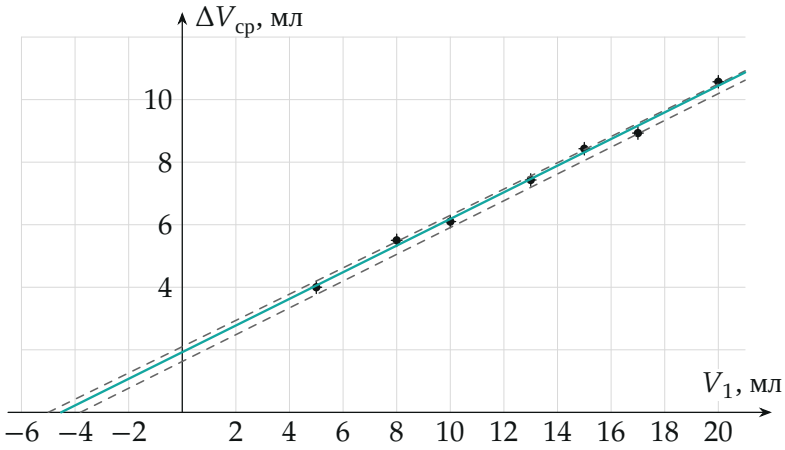


Рис. 4. Крайние прямые (пунктир), ещё проходящие через кресты ошибок: точки пересечения с осью V_1 — от −5,0 до −3,8 мл.

Обратите внимание. Брать одну точку и считать $V_0 = \Delta V/k - V_1$ нельзя: порог ΔP (а значит, k) заранее неизвестен — его, как и V_0, даёт только прямая по нескольким точкам. Наклон $k \approx 0{,}43$ означает $\Delta P \approx 0{,}74 P_0$: «защёлка» малого шприца держит заметное давление.

Проверка. Размерность: b/k — мл. Предел: при $V_0 \to 0$ прямая шла бы через начало координат — у нас она отсекает на оси ΔV отрезок $b \approx 1{,}9$ мл > 0, значит, объём трубки действительно заметен. Порядок величины: трубка длиной, например, 0,5 м с внутренним диаметром 3 мм имела бы объём $\pi d^2 l/4 \approx 3{,}5$ мл — тот же порядок.

Ответ. $V_0 = (4{,}5 \pm 0{,}6)$ мл.