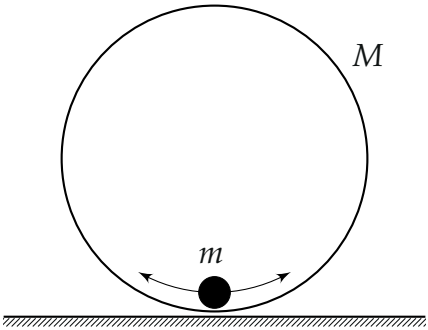
Колебания кольца

Задача 2. [ВсОШ 2022/23, региональный этап, 11 класс, задача 2] «Колебания кольца».

Оборудование: пластмассовое кольцо (внешний диаметр известен $D = 110$ мм), набор гаек (М8 — 1 шт, М10 — 6 шт; их массы указаны на установке), скотч, секундомер, миллиметровая бумага для построения графика.

Если установить кольцо вертикально на горизонтальную поверхность, закрепив в нижней части кольца небольшой груз, то при отклонении на небольшой угол от положения равновесия кольцо, перекатываясь, будет совершать колебания. Период этих колебаний зависит от отношения масс M/m кольца и груза.



0. Укажите массы гаек М8 и М10, которые указаны у вас на установке. Запишите номер своей установки, если он указан.

1. Определите период колебаний кольца при различных массах груза (не менее 5 значений). Оцените погрешности.
2. Получите теоретическое выражение для периода колебаний.
3. Используя графическую обработку полученных экспериментальных данных, проверьте их соответствие теоретической модели.
4. Используя результаты п. 3, определите массу пластмассового кольца и оцените её погрешность.

▲ **Решение. Что происходит.** Кольцо катится без проскальзывания и в каждый момент вращается вокруг точки касания P. Лёгкий груз внизу при повороте поднимается и создаёт возвращающую «пружину», а

инертность даёт почти целиком тяжёлое по сравнению с ним кольцо. Класс задачи — малые колебания: запишем закон сохранения энергии через угол поворота, приведём его к виду $\frac{I_{эф}\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{k_{эф}\varphi^2}{2} = \text{const}$, и период — $2\pi\sqrt{I_{эф}/k_{эф}}$. Затем подберём координаты, в которых теория даёт прямую.

Обозначения (рис. 2). $R = D/2 = 55$ мм — радиус кольца, O — центр, φ — угол поворота кольца от положения равновесия, $\omega = \dot{\varphi}$ — угловая скорость; h — высота подъёма груза; T — период.

Пункт 0. Массы гаек. На установке организаторов: М8 — $m = 4{,}5$ г, М10 — 10,2 г (меньшая масса груза — одна гайка М8, остальные — наборы гаек, скреплённые скотчем).

Пункт 1. Измерение периода. Отклоняем кольцо на малый угол (груз смещается на 1–2 см) и секундомером измеряем время t десяти полных колебаний, $T = t/10$; опыт для каждого груза повторяем 2–3 раза. Погрешность ручного пуска и остановки секундомера — около $\Delta t \approx 0{,}5$ с, поэтому

$$\Delta T_{\text{сист}} \approx \frac{\Delta t}{N} = \frac{0{,}5\text{ с}}{10} = 0{,}05\text{ с},$$

случайный разброс повторов заметно меньше, и $\Delta T \approx 0{,}05$ с. Для квадрата периода $\Delta(T^2) = 2T\Delta T$. Результаты организаторов:

m, г	4,5	10,2	20,4	30,5	40,8	61,3	102
$1/m$, кг$^{-1}$	222	98	49	32,8	24,5	16,3	9,8
T, с	1,82	1,30	0,94	0,78	0,69	0,58	0,47
T^2, с^2	3,3	1,7	0,88	0,61	0,48	0,34	0,22
$\Delta(T^2)$, с^2	0,18	0,13	0,09	0,08	0,07	0,06	0,05

Пункт 2. Теория.

2.1. Потенциальная энергия. При повороте кольца на угол φ груз, сидящий на расстоянии R от центра, поднимается (рис. 2) на

$$h = R(1 - \cos\varphi) \approx \frac{R\varphi^2}{2}, \qquad \Delta E_{\text{п}} = mgh = \frac{mgR\varphi^2}{2}.$$

Центр кольца при качении остаётся на высоте R, поэтому потенциальная энергия самого кольца не меняется.

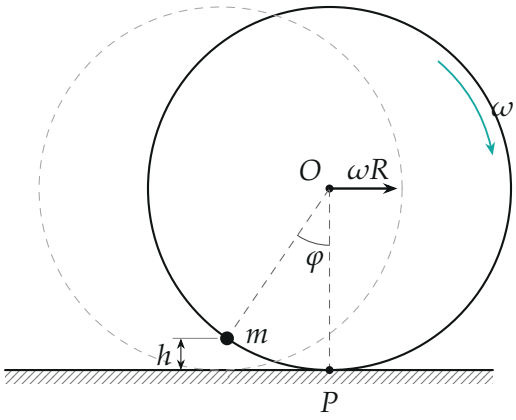


Рис. 2. Кольцо, повёрнутое на угол φ: оно вращается вокруг точки касания P, груз поднялся на $h = R(1 - \cos\varphi)$; пунктиром — положение равновесия.

2.2. Кинетическая энергия. Кольцо катится без проскальзывания, поэтому его скорость в каждый момент — вращение с угловой скоростью ω вокруг точки касания P. Момент инерции тонкого кольца относительно P по теореме Гюйгенса–Штейнера $I_P = MR^2 + MR^2 = 2MR^2$, и

$$E_{\text{к}} = \frac{I_P\omega^2}{2} = MR^2\dot{\varphi}^2.$$

Груз при малых колебаниях находится рядом с точкой касания, на расстоянии порядка $R\varphi$ от неё, его скорость $\sim R\varphi\,\dot{\varphi}$ — малая второго порядка, и его кинетической энергией пренебрегаем.

2.3. Закон сохранения энергии системы кольцо + груз (трение покоя в точке P работы не совершает — точка не скользит):

$$MR^2\dot{\varphi}^2 + \frac{mgR\varphi^2}{2} = \text{const}.$$

Это уравнение гармонических колебаний вида $\frac{I_{\text{эф}}\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{k_{\text{эф}}\varphi^2}{2} = \text{const}$ с

$I_{эф} = 2MR^2$, $k_{эф} = mgR$, поэтому

$$\omega_0^2 = \frac{k_{эф}}{I_{эф}} = \frac{mg}{2MR}, \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{2MR}{mg}}.$$

Пункт 3. Проверка модели. Теория даёт $T \propto m^{-1/2}$; в координатах T^2 и $1/m$ она превращается в прямую через начало координат:

$$T^2 = k \cdot \frac{1}{m}, \qquad k = \frac{8\pi^2 MR}{g}.$$

На сырых данных $T(m)$ (рис. 3) по глазу закон не проверить, поэтому строим $T^2(1/m)$ (рис. 4): точки в пределах погрешностей лежат на прямой, проходящей через начало координат, — модель подтверждается. Метод наименьших квадратов для прямой $T^2 = k/m$ с весами $1/\Delta(T^2)^2$ даёт

$$k = (1{,}64 \pm 0{,}06) \cdot 10^{-2}\ \text{кг} \cdot \text{с}^2,$$

а без весов $k = 1{,}55 \cdot 10^{-2}$ кг·с^2; с учётом этого разброса $k = (1{,}6 \pm 0{,}1) \cdot 10^{-2}$ кг·с^2.

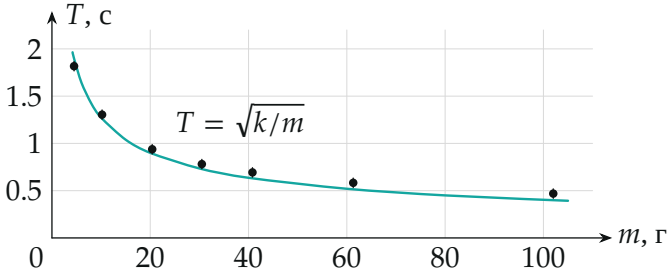


Рис. 3. Период колебаний в зависимости от массы груза: точки опыта ($\pm 0{,}05$ с) и теоретическая кривая с найденным k.

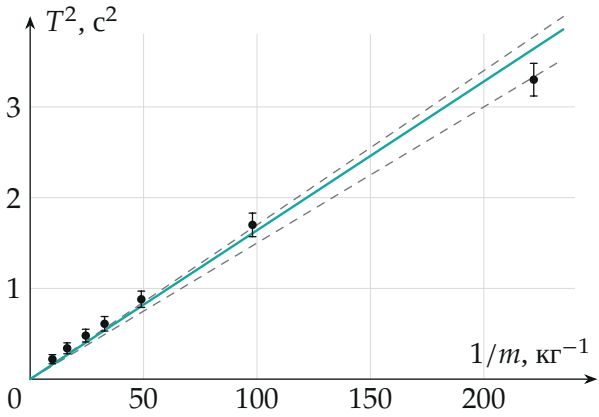


Рис. 4. Линеаризация: T^2 от $1/m$. Сплошная — прямая наименьших квадратов через начало координат, пунктир — крайние прямые $k = (1{,}6 \pm 0{,}1) \cdot 10^{-2}$ кг·с^2.

Пункт 4. Масса кольца. Из $k = 8\pi^2 MR/g$:

$$M = \frac{kg}{8\pi^2 R} = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-2} \cdot 9{,}8}{8 \cdot 9{,}87 \cdot 0{,}055}\ \text{кг} \approx 0{,}036\ \text{кг} = 36\ \text{г}.$$

Погрешность R мала (диаметр дан), поэтому относительная погрешность M равна погрешности k: $\varepsilon_M \approx 0{,}1/1{,}6 \approx 6\%$, $\Delta M \approx 2$ г.

Обратите внимание. Кинетическая энергия кольца — не $\frac{MR^2\dot{\varphi}^2}{2}$ (вращение вокруг центра), а вдвое больше: центр кольца ещё и движется со скоростью ωR (рис. 2). Забыв поступательную часть, получим M вдвое больше.

Проверка. Размерность: $\sqrt{MR/(mg)}$ — $\sqrt{\text{м}/(\text{м}/\text{с}^2)} = \text{с}$. Предел: при $m \to 0$ возвращающей силы нет, $T \to \infty$ — так и ведут себя точки на рис. 3. Порядок величины: пластмассовое кольцо диаметром 11 см и массой около 36 г — разумно.

Ответ. 1) T от 1,82 с ($m = 4{,}5$ г) до 0,47 с ($m = 102$ г), $\Delta T \approx 0{,}05$ с; 2) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{2MR}{mg}}$; 3) зависимость $T^2(1/m)$ — прямая через начало координат, $k = (1{,}6 \pm 0{,}1) \cdot 10^{-2}$ кг·с^2; 4) $M = (36 \pm 2)$ г.