Вращающаяся гильза

Задача 1. [ВсОШ 2022/23, региональный этап, 11 класс, задача 1] «Вращающаяся гильза».

Тонкостенная цилиндрическая гильза массы m, вращающаяся с угловой скоростью ω_0 вокруг своей оси, влетает со скоростью v_0 в отверстие в стальной плите (рисунок слева). Оси гильзы и отверстия совпадают, внешний радиус гильзы R равен радиусу отверстия, длина гильзы l равна толщине плиты.

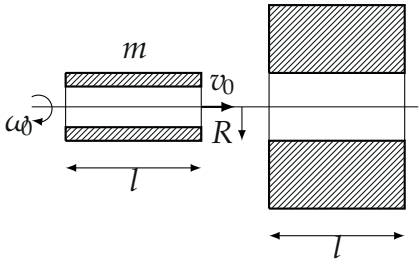
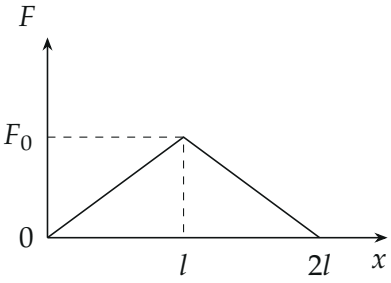


График зависимости силы, которую необходимо прикладывать к невращающейся гильзе, для проталкивания её через отверстие от величины перемещения представлен на рисунке справа. Максимальное значение силы равно F_0. Эта сила нужна для преодоления силы сухого трения, причём нормальные силы реакции, действующие на участки поверхности гильзы со стороны стен отверстия, не зависят от скорости и угловой скорости гильзы. Поверхности гильзы и отверстия однородны и одинаковы по всей длине. Координата $x = 0$ отвечает положению гильзы, которая только начала входить в плиту.



1. При каком минимальном значении $v_0 = v_{\min}$ гильза пролетит через отверстие (начальная угловая скорость ω_0 всегда одна и та же)?
2. Чему будет равна при этом (при $v_0 = v_{\min}$) угловая скорость ω_1 вращения гильзы в момент, когда гильза окажется целиком внутри плиты?
3. Через какое время τ от момента влета в отверстие при начальной скорости $v_0 \geqslant v_{\min}$ гильза окажется внутри плиты целиком?

▲ **Решение. Что происходит.** Внутри отверстия на поверхность гильзы действует сила сухого трения. По модулю она та же, что у невращающейся гильзы, $F(x)$ (нормальные силы от движения не зависят), а направлена против скорости *точек поверхности* — она наклонена к оси, потому что гильза ещё и вращается. Трение одновременно тормозит поступательное движение и вращение, причём так, что направление скорости точек поверхности не меняется. Значит, вдоль оси гильза движется как невращающаяся, но под «ослабленной» силой $F\cos\alpha$. Дальше — теорема о кинетической энергии и гармонические колебания. Класс задачи — динамика с сухим трением при поступательно-вращательном движении.

Обозначения. v, ω — скорость гильзы вдоль оси и её угловая скорость; α — угол скорости точек поверхности с осью; ось x — вдоль движения гильзы, x — путь переднего среза в плите; $F(x)$ — сила трения по графику.

1. Направление трения. Точка поверхности гильзы движется вдоль оси со скоростью v и по окружности со скоростью ωR (рис. 1). Её скорость относительно неподвижной стенки отверстия наклонена к оси под углом α:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\omega R}{v}.$$

Сила трения скольжения направлена против этой скорости, по модулю она $F(x)$; её проекции — на ось $F\cos\alpha$ и по касательной $F\sin\alpha$.

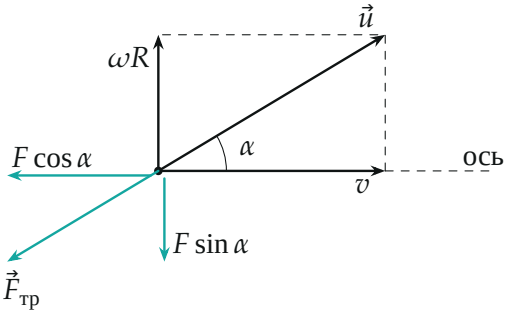


Рис. 1. Развёртка поверхности гильзы: скорость точки поверхности $\vec{u}$ складывается из v вдоль оси и ωR по окружности; трение $\vec{F}_{тр}$ направлено против $\vec{u}$.

2. Угол α не меняется. Второй закон Ньютона для гильзы в проекции на ось и основной закон динамики вращения (момент инерции тонкостенной гильзы mR^2):

$$m\frac{dv}{dt} = -F\cos\alpha, \qquad mR^2\frac{d\omega}{dt} = -F\sin\alpha\cdot R.$$

Делим одно на другое: $\dfrac{dv}{R\,d\omega} = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{v}{\omega R}$, то есть $\dfrac{dv}{v} = \dfrac{d\omega}{\omega}$ — скорости убывают в одной пропорции:

$$\frac{\omega R}{v} = \frac{\omega_0 R}{v_0} = \text{const}, \qquad \cos\alpha = \frac{v_0}{\sqrt{(\omega_0 R)^2 + v_0^2}} = \text{const}.$$

Тот же вывод словами: трение антипараллельно $\vec{u}$ и меняет только её модуль, но не направление. Поэтому вдоль оси гильза движется как невращающаяся под силой $F(x)\cos\alpha$ с постоянным $\cos\alpha$.

Пункт 1. Минимальная скорость. Теорема о кинетической энергии для движения вдоль оси: $\Delta\left(\dfrac{mv^2}{2}\right) = -\cos\alpha\displaystyle\int_0^{2l} F\,dx$. Интеграл — площадь треугольника на графике, $F_0 l$ (рис. 2). При $v_0 = v_{\min}$ гильза выле-

тает с нулевой скоростью (тогда и $\omega = 0$):

$$\frac{mv_{\min}^2}{2} = F_0 l \cos\alpha = \frac{F_0 l\, v_{\min}}{\sqrt{(\omega_0 R)^2 + v_{\min}^2}}.$$

Сокращаем на $v_{\min}$ и возводим в квадрат — получаем квадратное уравнение относительно $v_{\min}^2$:

$$v_{\min}^2\left((\omega_0 R)^2 + v_{\min}^2\right) = \left(\frac{2F_0 l}{m}\right)^2,$$

$$v_{\min} = \sqrt{\sqrt{\frac{(\omega_0 R)^4}{4} + \left(\frac{2F_0 l}{m}\right)^2} - \frac{(\omega_0 R)^2}{2}}.$$

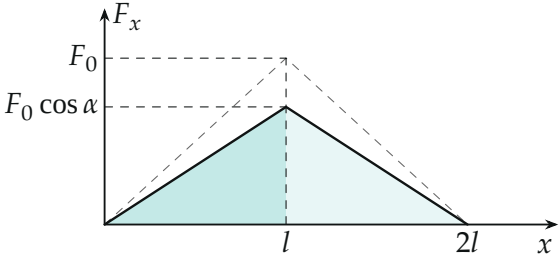


Рис. 2. Осевая проекция силы трения $F\cos\alpha$ (сплошная) — тот же треугольник, что у невращающейся гильзы (пунктир), уменьшенный в $\cos\alpha$ раз. До полного погружения ($x = l$) совершается ровно половина всей работы.

Пункт 2. Угловая скорость при полном погружении. До $x = l$ работа трения на осевом движении — половина полной (рис. 2, площадь левой половины треугольника):

$$\frac{mv_{\min}^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{mv_{\min}^2}{2} \quad\Rightarrow\quad v_1 = \frac{v_{\min}}{\sqrt{2}}.$$

Отношение ω/v постоянно (шаг 2), поэтому угловая скорость уменьши-

лась в том же отношении:

$$\omega_1 = \omega_0 \frac{v_1}{v_{\min}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}.$$

Пункт 3. Время погружения. При $0 < x < l$ сила по графику $F = F_0 x/l$. Второй закон Ньютона в проекции на ось:

$$m\ddot{x} = -\frac{F_0 \cos\alpha}{l}\, x.$$

Это уравнение гармонических колебаний с циклической частотой

$$\Omega = \sqrt{\frac{F_0 \cos\alpha}{ml}} = \sqrt{\frac{F_0 v_0}{ml\sqrt{(\omega_0 R)^2 + v_0^2}}}.$$

Начальные условия $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_0$ дают $x = \dfrac{v_0}{\Omega}\sin\Omega t$ (рис. 3). Гильза целиком в плите при $x = l$:

$$\tau = \frac{1}{\Omega}\arcsin\frac{l\Omega}{v_0}, \qquad \frac{l\Omega}{v_0} = \sqrt{\frac{F_0 l}{mv_0\sqrt{(\omega_0 R)^2 + v_0^2}}},$$

$$\tau = \sqrt{\frac{ml\sqrt{(\omega_0 R)^2 + v_0^2}}{F_0 v_0}}\ \arcsin\sqrt{\frac{F_0 l}{mv_0\sqrt{(\omega_0 R)^2 + v_0^2}}}.$$

Арксинус существует, когда $l\Omega \le v_0$, то есть $\frac{mv_0^2}{2} \ge \frac{F_0 l\cos\alpha}{2}$ — гильзе хватает энергии дойти до $x = l$; при $v_0 \ge v_{\min}$ это выполнено с запасом.

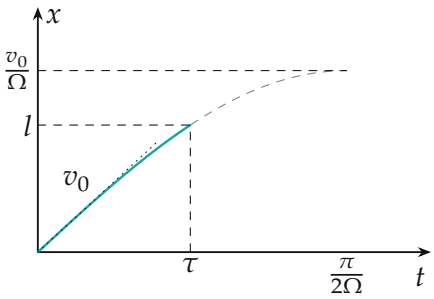


Рис. 3. Пока гильза входит в плиту, её координата — кусок синусоиды амплитуды v_0/Ω; время погружения τ — когда синусоида достигает l (здесь для примера $l\Omega/v_0 = 0{,}7$).

Обратите внимание. Тормозится не только поступательное движение, но и вращение — гильза не «докручивается» за счёт вращения и не отдаёт энергию вращения в поступательную: угол α постоянен. Поэтому в энергетическом балансе вдоль оси вращение входит только через множитель $\cos\alpha$. Из-за этого же ω_1 *меньше* ω_0, а не больше.

Проверка. Размерности: $\frac{F_0 l}{m}$ — м^2/с^2, как v^2; Ω — с$^{-1}$. Пределы: при $\omega_0 = 0$ получаем $v_{\min} = \sqrt{2F_0 l/m}$ — энергия $\frac{mv^2}{2}$ равна работе $F_0 l$ невращающейся гильзы; при $\omega_0 R \gg v$ осевая сила мала, $v_{\min} \approx \frac{2F_0 l}{m\omega_0 R} \to 0$. При $l\Omega \ll v_0$ (быстрый влёт) $\tau \approx l/v_0$ — гильза почти не тормозится.

Ответ. 1) $v_{\min} = \sqrt{\sqrt{\frac{(\omega_0 R)^4}{4} + \left(\frac{2F_0 l}{m}\right)^2} - \frac{(\omega_0 R)^2}{2}}$; 2) $\omega_1 = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$; 3) $\tau = \sqrt{\frac{ml\sqrt{(\omega_0 R)^2 + v_0^2}}{F_0 v_0}}\ \arcsin\sqrt{\frac{F_0 l}{mv_0\sqrt{(\omega_0 R)^2 + v_0^2}}}$.