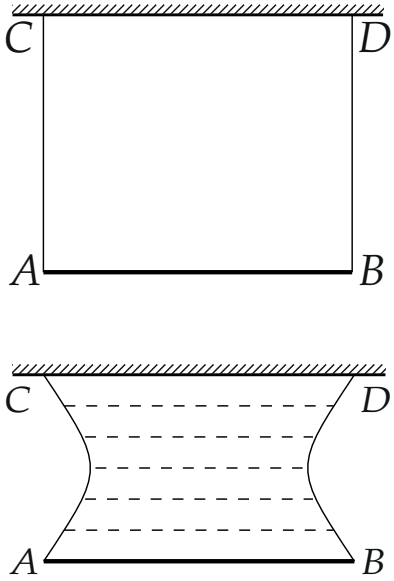
Как измерить поверхностное натяжение?

Задача 2. [ВсОШ 2022/23, региональный этап, 11 класс, задача 2] «Как измерить поверхностное натяжение?».

В поле тяжести на двух невесомых нерастяжимых нитях к горизонтальному стержню CD подвешена планка AB массы m длины L. Нити прикреплены к концам планки и располагаются вертикально (рисунок слева). После погружения системы в неизвестную жидкость и последующего извлечения её из жидкости в пространстве между нитями, планкой и стержнем сформировалась плёнка жидкости, а сама система приобрела вид, представленный на рисунке справа. При этом минимальное расстояние между нитями оказалось равным d, а расстояние между планкой и стержнем равным h.



1. Определите коэффициент поверхностного натяжения жидкости σ.
2. Вычислите величину σ при $L = 10$ см, $m = 2$ г, $d = 5$ см, $h = 8{,}7$ см.

▲ **Решение. Что происходит.** Плёнка тянет каждую нить внутрь, к другой нити, и нить выгибается. Сила поверхностного натяжения на каждый кусочек нити перпендикулярна нити и одинакова на единицу длины, поэтому натяжение нити постоянно, а сама нить — дуга окружности. Радиус дуги находим из геометрии (h и прогиб), натяжение — через радиус и σ, а σ — из равновесия нижней половины системы, где нити вертикальны. Класс задачи — статика нити под распределённой нагрузкой + поверхностное натяжение.

Обозначения. T — натяжение нити; r — радиус дуги нити; $s = \frac{L-d}{2}$ — прогиб нити (на сколько середина нити сместилась внутрь); O — центр дуги левой нити, E — середина хорды AC.

1. Нить — дуга окружности. Выделим маленький кусок нити длиной Δl, видимый из центра кривизны под углом $\Delta\varphi$ (рис. 1). На него действуют силы натяжения T_1 и T_2 по касательным на концах и сила поверхностного натяжения плёнки. У плёнки две поверхности, поэтому эта сила $\Delta F = 2\sigma\Delta l$; она перпендикулярна нити (плёнка тянет перпендикулярно своей границе в своей плоскости). Нить невесома.

Второй закон Ньютона для куска в проекции на касательную: ΔF на неё не проецируется, значит, $T_1 = T_2$ — *натяжение одинаково по всей нити*, $T = \text{const}$.

В проекции на нормаль к нити: две силы T отклонены от касательной на $\frac{\Delta\varphi}{2}$ каждая и вместе дают $2T\sin\frac{\Delta\varphi}{2} \approx T\Delta\varphi$ к центру кривизны; их уравновешивает ΔF:

$$T\Delta\varphi = 2\sigma\Delta l = 2\sigma r\Delta\varphi \quad \Rightarrow \quad r = \frac{T}{2\sigma} = \text{const}.$$

Радиус кривизны всюду одинаков — нить есть дуга окружности радиуса r, и

$$T = 2\sigma r. \qquad (1)$$

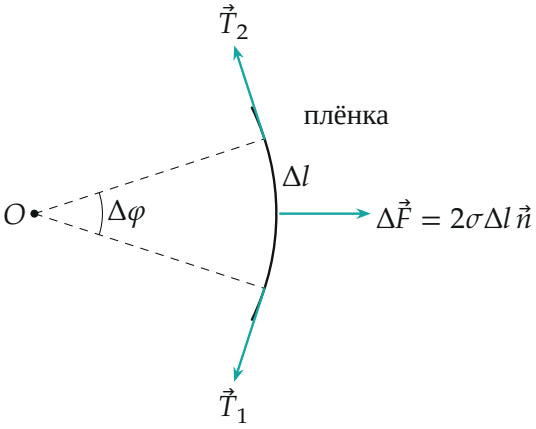


Рис. 1. Кусок нити Δl: натяжения T_1, T_2 по касательным, сила плёнки ΔF по нормали — от центра кривизны O, в сторону плёнки.

2. Радиус дуги из геометрии. Концы левой нити A и C на одной вертикали, $AC = h$; середина нити сместилась внутрь на $s = \frac{L-d}{2}$ (минимальное расстояние между нитями d — у середин). Центр дуги O лежит на горизонтали через середину E хорды, снаружи от плёнки (рис. 2). Теорема Пифагора для треугольника OEA: $OA = r$, $AE = \frac{h}{2}$, $OE = r - s$:

$$r^2 = (r-s)^2 + \frac{h^2}{4} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{s^2 + h^2/4}{2s} = \frac{(L-d)^2 + h^2}{4(L-d)}. \qquad (2)$$

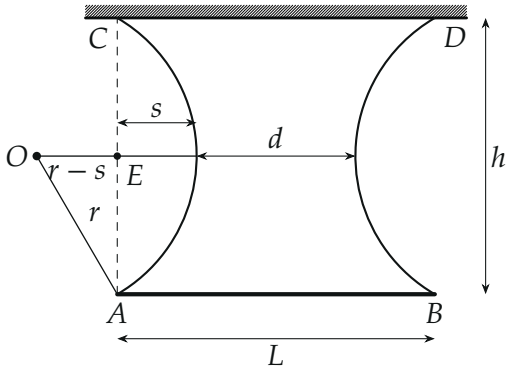


Рис. 2. Нити — дуги окружностей радиуса r (нарисовано для чисел пункта 2: $r = 5{,}03$ см). Прямоугольный треугольник OEA связывает r, прогиб s и $\frac{h}{2}$.

3. Равновесие нижней половины. Мысленно разрежем систему по горизонтали через середины нитей и рассмотрим нижнюю часть: планку, нижние половины нитей и плёнки (рис. 3). В разрезе нити вертикальны (середина нити — её крайняя точка), поэтому каждая нить тянет вверх силой T. Плёнка в разрезе тянет вверх вдоль всей линии разреза длиной d с двух поверхностей: $2\sigma d$. Вниз — сила тяжести планки. Второй закон Ньютона в проекции на вертикаль (нити и плёнка невесомы):

$$2T + 2\sigma d = mg.$$

Подставляем T из (1) и r из (2):

$$4\sigma r + 2\sigma d = mg \quad \Rightarrow \quad \sigma\Big(\frac{(L-d)^2 + h^2}{L-d} + 2d\Big) = mg.$$

Сумма в скобках: $\dfrac{(L-d)^2 + 2d(L-d) + h^2}{L-d} = \dfrac{L^2 - d^2 + h^2}{L-d}$, откуда

$$\sigma = \frac{mg(L-d)}{h^2 + L^2 - d^2}.$$

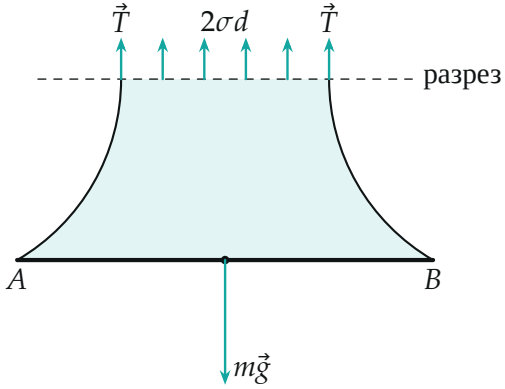


Рис. 3. Нижняя половина системы (плёнка закрашена): вверх — натяжения нитей T в разрезе и плёнка $2\sigma d$, вниз — вес планки mg. Длины стрелок — для чисел пункта 2: $T = 0{,}67 \cdot 10^{-2}$ Н, $2\sigma d = 0{,}66 \cdot 10^{-2}$ Н, $mg = 2{,}0 \cdot 10^{-2}$ Н.

Пункт 2. Числа. При $g = 10$ м/с^2:

$$\sigma = \frac{2 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 0{,}05}{0{,}087^2 + 0{,}10^2 - 0{,}05^2}\ \frac{\text{Н}}{\text{м}} = \frac{1{,}0 \cdot 10^{-3}}{1{,}507 \cdot 10^{-2}}\ \frac{\text{Н}}{\text{м}} \approx 0{,}066\ \frac{\text{Н}}{\text{м}}$$

(при $g = 9{,}8$ м/с^2 — 0,065 Н/м). Радиус дуги $r = 5{,}03$ см, натяжение нити $T = 2\sigma r \approx 6{,}7$ мН.

Обратите внимание. Плёнку тянут *две* поверхности — отсюда 2σ и в силе на нить, и в силе в разрезе. И плёнка в разрезе действует только на длине d между нитями, а не L: разрез проходит там, где нити ближе всего.

Проверка. Размерность: $\frac{mg \cdot L}{L^2}$ — Н/м. Предел: без плёнки нити не прогибаются, $d \to L$, и $\sigma \to 0$ при конечном h — верно. Баланс сил числами: $T = 2\sigma r = 6{,}7$ мН, $2T + 2\sigma d = 13{,}4 + 6{,}6 = 20{,}0$ мН $= mg$. Значение 0,066 Н/м близко к поверхностному натяжению мыльной воды и чуть меньше, чем у чистой воды (0,073 Н/м).

Ответ. 1) $\sigma = \dfrac{mg(L-d)}{h^2 + L^2 - d^2}$; 2) $\sigma \approx 0{,}066$ Н/м.