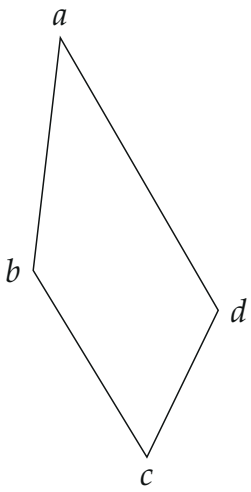
Трапеция Лорда Кельвина

Задача 3. [ВсОШ 2022/23, региональный этап, 11 класс, задача 3] «Трапеция Лорда Кельвина».

В архиве лорда Кельвина была найдена диаграмма циклического процесса, проводимого с постоянным количеством идеального двухатомного газа, представляющая собой в координатах pV трапецию. От времени чернила выцвели, и на рисунке, представленном ниже, осталась видна лишь трапеция. Известно, что теплоёмкость в каждом из процессов ab, bc, cd, da была постоянна, причём $C_{bc} = C_{da} > C_{ab} = C_{cd}$. Также известно, что максимальная температура газа в цикле равна $T_1 = 400$ К, а температуры некоторой пары из точек a, b, c, d были одинаковы и равны $T_2 = 200$ К.



1. Пользуясь только циркулем и линейкой без делений, восстановите положения координатных осей pV.
   Примечание: описывать построение параллельных и перпендикулярных прямых, проходящих через заданную точку, деление отрезка пополам и подобные стандартные геометрические процедуры не обязательно.

2. Определите температуры T_a, T_b, T_c, T_d в точках a, b, c, d соответственно.
3. Найдите КПД цикла η.

▲ **Решение. Что происходит.** Прямая на pV-диаграмме — линейный процесс. Сначала выясним, у каких линейных процессов теплоёмкость постоянна: таких всего три — изобара, изохора и прямая через начало координат. Сравнение теплоёмкостей говорит, какие стороны трапеции какими процессами являются, а это и задаёт оси. Температуры — из уравнения Менделеева–Клапейрона и подобия треугольников, КПД — из первого начала термодинамики по участкам. Класс задачи — теплоёмкость процесса и КПД цикла.

Обозначения. ν — количество газа; $C_V = \frac{5}{2}R$, $C_p = \frac{7}{2}R$ — молярные теплоёмкости двухатомного газа; C — молярная теплоёмкость процесса; Q_{ab}, …— теплота, полученная газом на участке.

1. Линейные процессы с постоянной теплоёмкостью. Пусть процесс $p = p_0 + \alpha V$. Первое начало термодинамики для малого участка: $\nu C\,dT = \nu C_V\,dT + p\,dV$. Из уравнения Менделеева–Клапейрона $(p_0 + \alpha V)V = \nu RT$ получаем $\nu R\,dT = (p_0 + 2\alpha V)\,dV$, тогда

$$C = C_V + \frac{p\,dV}{\nu\,dT} = C_V + R\,\frac{p_0 + \alpha V}{p_0 + 2\alpha V}.$$

Дробь не зависит от V только при $p_0 = 0$ — это прямая через начало координат, $p = \alpha V$, и для неё

$$C = C_V + \frac{R}{2} = \frac{C_V + C_p}{2} = 3R.$$

Кроме неё, постоянная теплоёмкость у изобары ($\alpha = 0$, $C = C_p = \frac{7}{2}R$) и у изохоры ($C = C_V = \frac{5}{2}R$). Других линейных процессов с постоянной C нет.

2. Какие стороны — какие процессы. Стороны bc и da параллельны, ab и cd — нет. Две непараллельные стороны ab и cd не могут быть обе изобарами или обе изохорами (те параллельны друг другу), а теплоёмкости у них равны — значит, это прямые через начало координат,

$C_{ab} = C_{cd} = 3R$. Параллельные bc и da — изобары или изохоры; по условию $C_{bc} > 3R$, а у изохоры $\frac{5}{2}R < 3R$. Значит, bc и da — **изобары**, $C = \frac{7}{2}R$.

Пункт 1. Построение осей (рис. 1).

1. Продолжаем стороны ab и cd до пересечения — это начало координат O.
2. Через O проводим прямую, параллельную изобарам bc и da, — это ось V (на ней $p = 0$, изобара $p = 0$ параллельна остальным). Направление — в сторону трапеции (объём положителен).
3. Через O проводим перпендикуляр к оси V — это ось p, тоже в сторону трапеции.

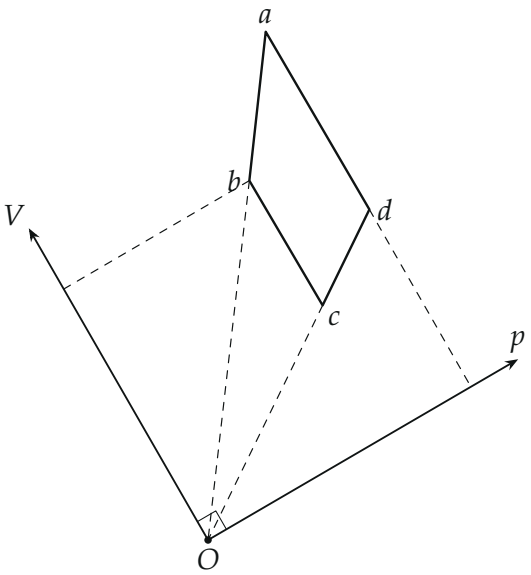


Рис. 1. Построение: продолжения ab и cd пересекаются в начале координат O; ось V параллельна изобарам bc, da, ось p ей перпендикулярна. Пунктир от b и d к осям — проекции: V_b и p_d.

Пункт 2. Температуры. На изобарах $p_a = p_d$ и $p_b = p_c$. Точки a, b лежат на одной прямой через O, точки d, c — на другой; изобары da и cb параллельны, поэтому треугольники Oda и Ocb подобны с центром

подобия O, и $\dfrac{V_a}{V_d} = \dfrac{V_b}{V_c}$. По уравнению Менделеева–Клапейрона при постоянном давлении $T \propto V$:

$$\frac{T_a}{T_d} = \frac{V_a}{V_d} = \frac{V_b}{V_c} = \frac{T_b}{T_c} \quad \Rightarrow \quad T_a T_c = T_b T_d.$$

Какие точки равны по температуре? На прямой через начало $p = \alpha V$ температура $T = \frac{\alpha V^2}{\nu R}$ растёт с удалением от O: $T_a > T_b$, $T_d > T_c$. На изобарах $T \propto V$: $T_a > T_d$, $T_b > T_c$. Значит, a — самая горячая точка, $T_a = T_1$, c — самая холодная, и равными могут быть только $T_b = T_d = T_2$. Тогда

$$T_c = \frac{T_b T_d}{T_a} = \frac{T_2^2}{T_1} = 100\ \text{К}.$$

$$T_a = 400\ \text{К}, \qquad T_b = T_d = 200\ \text{К}, \qquad T_c = 100\ \text{К}.$$

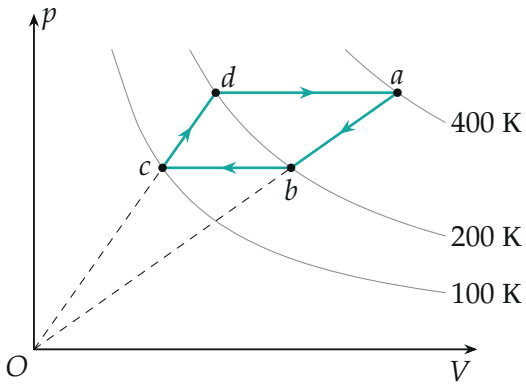


Рис. 2. Тот же цикл в привычных осях (по найденным температурам): изобары bc, da, лучи через O — ab, cd; серые кривые — изотермы 100, 200, 400 K. Через b и d проходит одна изотерма 200 K.

Пункт 3. КПД. КПД имеет смысл для тепловой машины: работа газа за цикл положительна, на рис. 2 цикл обходится по часовой стрелке, $a \to b \to c \to d \to a$. Теплота на участке с постоянной теплоёмкостью $Q =$

$\nu C\Delta T$ (рис. 3):

$$Q_{ab} = 3\nu R\,(T_b - T_a) = -600\,\nu R\cdot\text{K},$$
$$Q_{bc} = \tfrac{7}{2}\nu R\,(T_c - T_b) = -350\,\nu R\cdot\text{K},$$
$$Q_{cd} = 3\nu R\,(T_d - T_c) = +300\,\nu R\cdot\text{K},$$
$$Q_{da} = \tfrac{7}{2}\nu R\,(T_a - T_d) = +700\,\nu R\cdot\text{K}.$$

Газ получает тепло на cd и da: $Q_+ = 1000\,\nu R\cdot$К; работа за цикл по первому началу $A = \sum Q = 50\,\nu R\cdot$К. КПД

$$\eta = \frac{A}{Q_+} = \frac{50}{1000} = 0{,}05.$$

В общем виде (с $T_c = T_2^2/T_1$):

$$A = \frac{\nu R}{2}\,\frac{(T_1 - T_2)^2}{T_1}, \qquad Q_+ = \frac{\nu R}{2}\,\frac{(T_1 - T_2)(7T_1 + 6T_2)}{T_1},$$

и

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{7T_1 + 6T_2} = 0{,}05.$$

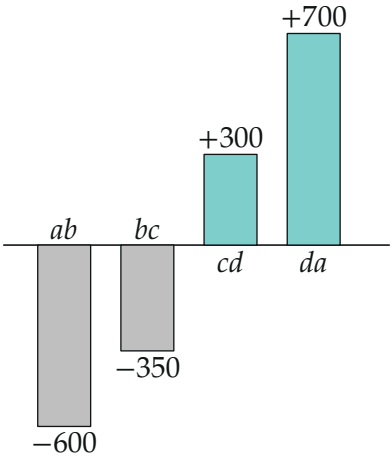


Рис. 3. Теплота на участках цикла в единицах $\nu R\cdot$К: бирюзовые — газ полу-

чает тепло ($Q_+ = 1000$), серые — отдаёт ($600 + 350 = 950$). Разность 50 *— работа за цикл.*

Обратите внимание. Положения осей по одной трапеции восстанавливаются только потому, что изобары и лучи из начала координат — единственные линейные процессы с подходящими теплоёмкостями: без шага 1 построение не обосновано. Пара равных температур тоже не произвольна — её выделяют неравенства шага «Пункт 2».

Проверка. Работа как площадь трапеции: $A = \frac{(p_a - p_b)}{2}((V_a - V_d) + (V_b - V_c))$. В единицах $p_b = 1$, $V_b = 2$ ($\nu R{\cdot}200\text{ K} = p_b V_b$): $p_a = \sqrt{2}$, $V_a = 2\sqrt{2}$, $V_d = \sqrt{2}$, $V_c = 1$, площадь $\frac{\sqrt{2}-1}{2}(\sqrt{2}+1) = \frac{1}{2}$, то есть $A = \frac{1}{4}p_b V_b = 50\,\nu R{\cdot}\text{K}$ — совпадает. КПД 0,05 намного меньше КПД Карно $1 - \frac{T_c}{T_a} = 0{,}75$, как и должно быть.

Ответ. 1) начало координат O — пересечение продолжений ab и cd; ось V — через O параллельно изобарам bc, da, ось p — перпендикулярно ей; 2) $T_a = 400$ K, $T_b = T_d = 200$ K, $T_c = \dfrac{T_2^2}{T_1} = 100$ K; 3) $\eta = \dfrac{T_1 - T_2}{7T_1 + 6T_2} = 0{,}05$.