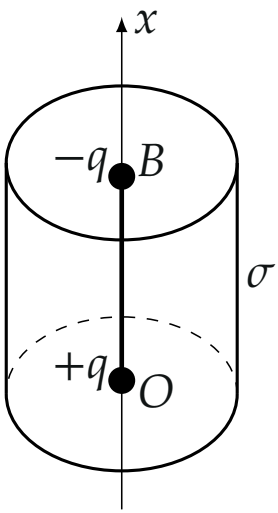
Цилиндр и нелинейная плотность заряда

Задача 4. [ВсОШ 2022/23, региональный этап, 11 класс, задача 4] «Цилиндр и нелинейная плотность заряда».

Диполь — жёсткий стержень длины H с зарядами q и $-q$ на концах — находится на оси тонкостенной цилиндрической трубки радиуса R и высоты H. На трубку нанесён заряд с поверхностной плотностью σ, которая зависит от расстояния x до плоскости нижнего основания по закону

$$\sigma(x) = \sigma_0 \sin^2\Big(\frac{\pi x}{2H}\Big),$$

где $\sigma_0 > 0$. Найдите направление и величину электростатической силы, действующей на диполь в положении, в котором его заряды q и $-q$ находятся в центре нижнего основания (т. O) и в центре верхнего основания (т. B) соответственно.



▲ **Решение. Что происходит.** Сила на диполь — сумма сил на его заряды, $q\vec{E}(O) - q\vec{E}(B)$. Поле трубки на оси считается интегралом по кольцам, но интеграл с $\sin^2$ неудобен. Обходим его симметрией: отражённое

распределение $\sigma(H-x)$ в сумме с исходным даёт *равномерно* заряженную трубку, а поле в B от исходной трубки равно полю в O от отражённой. Остаётся поле равномерно заряженной трубки в центре её основания — обычный интеграл. Класс задачи — принцип суперпозиции и симметрия в электростатике.

Обозначения. Ось x — вдоль оси трубки вверх, начало в O; E_1 — модуль поля трубки в точке O, E_2 — в точке B; $\sigma'(x) = \sigma(H-x)$ — отражённое распределение.

1. Направления полей и сил. Каждое кольцо трубки заряжено положительно ($\sigma \geq 0$). На оси кольца поле направлено вдоль оси, от кольца. Все кольца лежат выше O — поле в O направлено вниз, $\vec{E}(O) = -E_1\vec{e}_x$. Все кольца ниже B — поле в B вверх, $\vec{E}(B) = +E_2\vec{e}_x$. Силы на заряды диполя (рис. 1):

$$\vec{F}_q = q\vec{E}(O) = -qE_1\vec{e}_x, \qquad \vec{F}_{-q} = -q\vec{E}(B) = -qE_2\vec{e}_x.$$

Обе направлены вниз, по оси x против её направления:

$$F = q(E_1 + E_2).$$

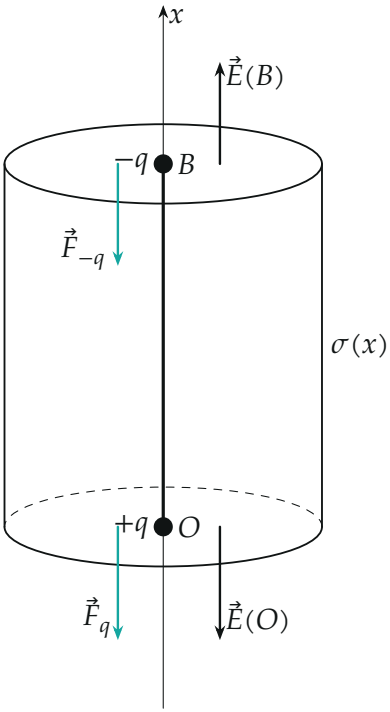


Рис. 1. Поле трубки в O направлено вниз, в B — вверх; сила на $+q$ вниз по полю, на $-q$ — против поля, тоже вниз. Длины стрелок условны: $E_1 \neq E_2$.

2. Сумма полей через отражение. Отразим трубку относительно её средней плоскости $x = \frac{H}{2}$: заряд на высоте x переходит на высоту $H - x$, плотность становится $\sigma'(x) = \sigma(H - x)$, а точка B переходит в O. Поле в B от исходной трубки по модулю равно полю в O от отражённой (рис. 2): $E_2 = E'(O)$. Значит, $E_1 + E_2$ — это модуль поля в O от двух трубок вместе (оба поля в O направлены вниз). По принципу суперпозиции поле двух трубок — поле трубки с плотностью

$$\sigma(x) + \sigma'(x) = \sigma_0 \sin^2 \frac{\pi x}{2H} + \sigma_0 \sin^2\Big(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{2H}\Big),$$

$$\sigma(x) + \sigma'(x) = \sigma_0\Big(\sin^2 \frac{\pi x}{2H} + \cos^2 \frac{\pi x}{2H}\Big) = \sigma_0,$$

то есть *равномерно* заряженной трубки.

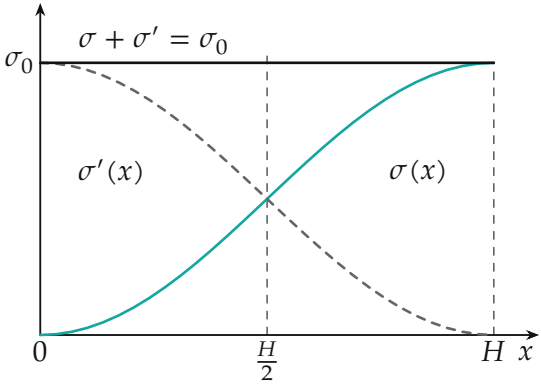


Рис. 2. Плотность $\sigma(x)$ (бирюза) и её отражение $\sigma'(x) = \sigma(H - x)$ (пунктир) в сумме дают постоянную σ_0 при любом x.

3. Поле равномерно заряженной трубки в центре основания. Разобьём трубку на кольца высотой dx на высоте x (рис. 3). Заряд кольца $dQ = \sigma_0 \cdot 2\pi R\, dx$. Поле кольца на оси на расстоянии x от его плоскости направлено вдоль оси, его модуль — сумма проекций полей точечных зарядов кольца на ось (поперечные составляющие гасятся симметрией):

$$dE = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 (x^2 + R^2)} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} = \frac{\sigma_0 R}{2\varepsilon_0} \frac{x\, dx}{(x^2 + R^2)^{3/2}}.$$

Все кольца дают поле в одну сторону, складываем модули:

$$E_1 + E_2 = \frac{\sigma_0 R}{2\varepsilon_0} \int_0^H \frac{x\, dx}{(x^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{\sigma_0 R}{2\varepsilon_0} \Big(\frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + H^2}} \Big),$$

$$E_1 + E_2 = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0} \Big(1 - \frac{R}{\sqrt{R^2 + H^2}} \Big).$$

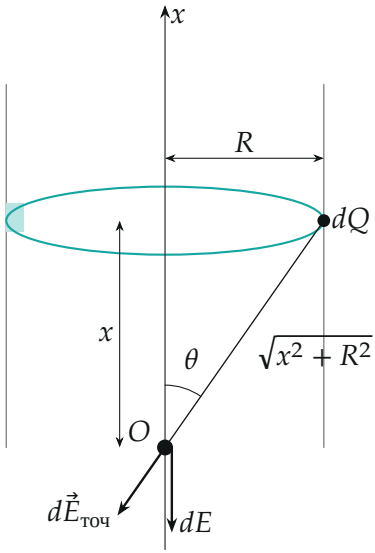


Рис. 3. Кольцо высоты dx на расстоянии x от O: поле заряда кольца в O направлено от него, на ось x даёт проекцию с $\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}$.

4. Ответ. Подставляем в $F = q(E_1 + E_2)$:

$$F = \frac{q\sigma_0}{2\varepsilon_0}\Big(1 - \frac{R}{\sqrt{R^2+H^2}}\Big),$$

сила направлена вдоль оси трубки вниз — от B к O, против оси x.

Обратите внимание. Сами E_1 и E_2 по отдельности через элементарные функции не выражаются (интеграл с $\sin^2$ и $(x^2+R^2)^{-3/2}$), и они не равны: при $R = H$ численно $E_1 \approx 0{,}090\,\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$, $E_2 \approx 0{,}056\,\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$. Для силы нужна только их сумма — и именно её даёт отражение.

Проверка. Размерность: $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ — напряжённость, $q\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ — сила. Пределы: $H \to \infty$ — длинная трубка, $F \to \frac{q\sigma_0}{2\varepsilon_0}$ (поле в центре основания полубесконечной трубки — половина $\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$); $H \ll R$ — короткое кольцо, $F \approx \frac{q\sigma_0 H^2}{4\varepsilon_0 R^2} \to 0$. Численная проверка интегралом по кольцам с исходной $\sigma(x)$ при $R = H$ даёт $E_1 + E_2 = 0{,}1464\,\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$ — совпадает с $\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{\sqrt{2}})$.

Ответ. Сила направлена вдоль оси трубки вниз (от B к O, против оси

x), $F = \frac{q\sigma_0}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{R}{\sqrt{R^2 + H^2}}\right)$.