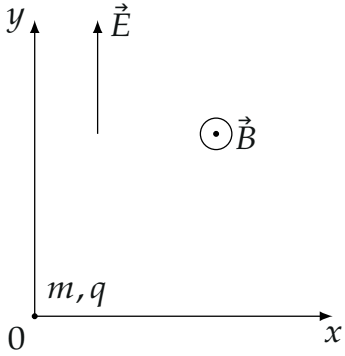
Движение в скрещенных полях

Задача 5. [ВсОШ 2022/23, региональный этап, 11 класс, задача 5] «Движение в скрещенных полях».

В скрещённых электрическом и магнитном полях движется маленькая частица массой m с положительным зарядом q. Вектор однородного электрического поля с напряжённостью E направлен вдоль оси y. Вектор индукции магнитного поля направлен вдоль оси z, перпендикулярной плоскости xy (см. рис.), а его величина зависит только от координаты y по закону $B = \alpha\sqrt{|y|}$. В начальный момент времени частица расположена в начале координат, а её скорость равна нулю. При дальнейшем движении частица впервые остановилась в момент времени $t = T$ после начала движения. Силы тяжести нет.



Примечание: при малых значениях Δx справедлива формула: $\Delta(x^n) = nx^{n-1}\Delta x$.

1. Определите скорость частицы в момент, когда она направлена вдоль оси x.
2. Определите радиус кривизны траектории частицы в точке с координатой y.
3. Изобразите траекторию частицы за время движения T.
4. На каком расстоянии от точки старта окажется частица через время $\tau = 3T/2$?

▲ **Решение. Что происходит.** Электрическое поле разгоняет частицу вдоль y, магнитное поворачивает её скорость, не меняя модуля. Два «интеграла движения» дают всё: модуль скорости — из теоремы о кинетической энергии (сила Лоренца работы не совершает), v_x — из второго закона Ньютона по оси x, где сила Лоренца пропорциональна v_y и потому интегрируется по y. Зная v и v_x, находим радиус кривизны через нормальное ускорение; он оказывается постоянным — частица движется по полуокружностям. Класс задачи — движение заряда в скрещённых полях, интегрирование по координате.

Обозначения. v, v_x, v_y — модуль и проекции скорости; ρ — радиус кривизны траектории; $y \geq 0$ (частица уходит вверх по полю и ниже $y = 0$ не опускается — см. шаг 1).

1. Модуль скорости. Сила Лоренца $q\vec{v}\times\vec{B}$ перпендикулярна скорости, её мощность равна нулю. Теорема о кинетической энергии: изменение $\frac{mv^2}{2}$ равно работе электрической силы qE на перемещении y вдоль поля:

$$\frac{mv^2}{2} = qEy \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2qEy}{m}}. \tag{1}$$

Отсюда же $y \geq 0$: при $y < 0$ кинетическая энергия была бы отрицательной, а $v = 0$ — только на прямой $y = 0$.

2. Проекция v_x. Сила Лоренца $q\vec{v} \times \vec{B}$ при $\vec{B} = B\vec{e}_z$ имеет проекции $(qv_yB,\ -qv_xB)$; электрическая сила вдоль x не действует. Второй закон Ньютона в проекции на ось x за малое время Δt (рис. 2):

$$m\,\Delta v_x = qv_yB\,\Delta t = qB\,\Delta y = q\alpha\sqrt{y}\,\Delta y.$$

По примечанию $\sqrt{y}\,\Delta y = \frac{2}{3}\Delta(y^{3/2})$, поэтому $m\,\Delta v_x = \frac{2}{3}q\alpha\,\Delta(y^{3/2})$, и при $v_x = 0$, $y = 0$ в начале

$$v_x = \frac{2\alpha q}{3m}\,y^{3/2}. \tag{2}$$

Пункт 1. Скорость вдоль оси x. Скорость направлена вдоль x, когда

$v_y = 0$, то есть $v_x = v$. Приравниваем (1) и (2):

$$\frac{2\alpha q}{3m}\, y_1^{3/2} = \sqrt{\frac{2qE}{m}}\, y_1^{1/2} \quad \Rightarrow \quad y_1 = \frac{3m}{2\alpha q}\sqrt{\frac{2qE}{m}} = \frac{3}{\alpha}\sqrt{\frac{mE}{2q}},$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2qEy_1}{m}} = \sqrt{\frac{3E}{\alpha}}\sqrt{\frac{2qE}{m}}.$$

Это верхняя точка траектории: на рис. 1 кривые $v(y)$ и $v_x(y)$ пересекаются при $y = y_1$, выше подняться нельзя, ведь $v_x \le v$.

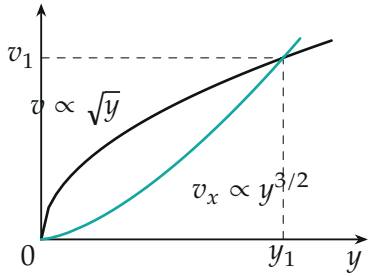


Рис. 1. Модуль скорости $v(y)$ (чёрная) и проекция $v_x(y)$ (бирюза). Они равны при $y = y_1$ — там скорость горизонтальна; выше $v_x > v$ невозможно.

Пункт 2. Радиус кривизны. Второй закон Ньютона в проекции на нормаль к траектории (к центру кривизны). Сила Лоренца qvB целиком направлена по нормали — вправо от скорости, к центру. Электрическая сила qE вдоль y; единичная нормаль $\vec{n} = \frac{1}{v}(v_y, -v_x)$, поэтому проекция qE на неё $-qE\,\frac{v_x}{v}$ (рис. 2):

$$\frac{mv^2}{\rho} = qvB - qE\,\frac{v_x}{v}.$$

Подставим (1), (2) и $B = \alpha\sqrt{y}$: $qvB = q\alpha y\sqrt{\frac{2qE}{m}}$, а $qE\frac{v_x}{v} = \frac{1}{3}q\alpha y\sqrt{\frac{2qE}{m}}$ — ровно треть первого слагаемого. Тогда

$$\frac{2qEy}{\rho} = \frac{2}{3}\,q\alpha y\sqrt{\frac{2qE}{m}} \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{3}{\alpha}\sqrt{\frac{mE}{2q}} = \text{const}.$$

Радиус кривизны не зависит от y и равен y_1. Обозначим $R = \frac{3}{\alpha}\sqrt{\frac{mE}{2q}}$.

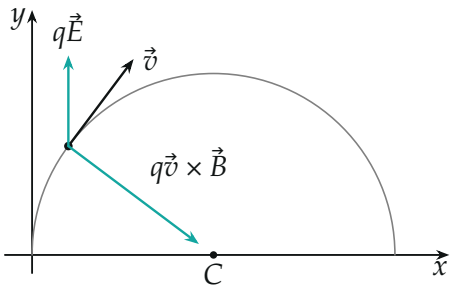


Рис. 2. Силы в точке траектории ($y = 0{,}6\,R$, длины стрелок — по модулю): сила Лоренца $qvB = 1{,}8\,qE$ направлена к центру C, проекция $q\vec{E}$ на нормаль направлена от центра и равна $qE\,\frac{v_x}{v} = qE\,\frac{y}{R}$.

Пункт 3. Траектория. Частица стартует из O со скоростью, направленной вверх (её даёт поле E), и движется по дуге радиуса R, касающейся оси y в начале координат, — центр в точке $(R,\,0)$. По окружности она поднимается до верхней точки $(R,\,R)$ — там $y = y_1 = R$, скорость горизонтальна, — и опускается до $(2R,\,0)$, где $y = 0$ и по (1) $v = 0$: это первая остановка, $t = T$. Дальше всё повторяется: из состояния покоя на оси x — та же полуокружность, сдвинутая на $2R$ (рис. 3). Траектория — цепочка полуокружностей радиуса R над осью x, частица дрейфует вдоль x.

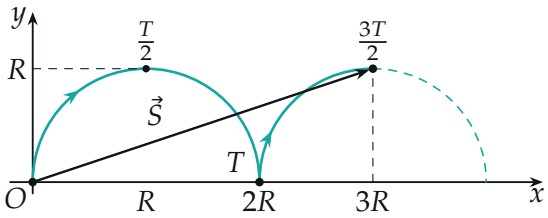


Рис. 3. Траектория: полуокружность радиуса R от O до первой остановки в $(2R, 0)$ за время T, затем такая же следующая. В момент $\frac{3T}{2}$ частица в верхней точке второй дуги, $(3R,\,R)$.

Пункт 4. Положение в момент $\frac{3T}{2}$. На каждой полуокружности движение симметрично относительно верхней точки: скорость по (1) зависит только от y, а y на левой и правой половинах дуги принимает одинаковые значения. Значит, верхнюю точку частица проходит ровно через $\frac{T}{2}$ после начала дуги. Момент $\frac{3T}{2} = T + \frac{T}{2}$ — середина второй дуги, точка $(3R,\ R)$. Расстояние от старта по теореме Пифагора:

$$S = \sqrt{(3R)^2 + R^2} = \sqrt{10}\,R = \frac{3}{\alpha}\sqrt{\frac{5mE}{q}}.$$

Обратите внимание. Ось x — линия, где $B = 0$ и $v = 0$, но частица не «застревает»: на оси её снова толкает поле E. И радиус кривизны — не $\frac{mv}{qB}$, как в чисто магнитном поле: электрическая сила тоже имеет нормальную составляющую, она уменьшает кривизну в полтора раза.

Проверка. Размерность: $[\alpha] = \text{Тл}/\text{м}^{1/2}$, $\text{Тл} = \frac{\text{кг}}{\text{Кл}\cdot\text{с}}$, $\sqrt{\frac{mE}{q}}$ — $\frac{\text{кг}\cdot\text{м}^{1/2}}{\text{Кл}\cdot\text{с}}$, и $R = \frac{3}{\alpha}\sqrt{\frac{mE}{2q}}$ — метры. Численное интегрирование уравнений движения (метод Рунге–Кутты, $q = m = E = 1$, $\alpha = \frac{3}{\sqrt{2}}$, $R = 1$) даёт точки (R, R) при $t = \frac{T}{2}$, $(2R, 0)$ с $v = 0$ при $t = T$ и $(3R, R)$ при $t = \frac{3T}{2}$, наибольшую скорость $v_1 = 2{,}060$ — совпадает с формулой.

Ответ. 1) $v_1 = \sqrt{\frac{3E}{\alpha}\sqrt{\frac{2qE}{m}}}$; 2) $R = \frac{3}{\alpha}\sqrt{\frac{mE}{2q}} = \text{const}$; 3) цепочка полуокружностей радиуса R над осью x, первая — от начала координат до точки $(2R, 0)$; 4) $S = \sqrt{10}\,R = \frac{3}{\alpha}\sqrt{\frac{5mE}{q}}$.