Взвесить без весов

Задача 2. [ВсОШ 2022/23, региональный этап, 9 класс, практический тур, задача 2] **Оборудование:** лакированный деревянный цилиндр (масса цилиндра указана в комплекте оборудования), отрезок пластиковой трубки, мерный цилиндр, две линейки, пластиковый стакан с водой (плотность воды $\rho_0 = 1$ г/см^3).

В работе требуется оценка погрешностей: как измеряемых, так и расчётных величин.

0. Запишите в своё решение массу M выданного вам лакированного цилиндра.

1. Определите среднюю плотность ρ лакированного цилиндра.
2. Определите массу отрезка пластиковой трубки m двумя способами: используя правило моментов сил и закон Архимеда.

▲ **Решение. Что происходит.** Весов нет, есть известная масса M палочки, вода и линейки. Плотность даёт условие плавания: плавающая палочка погружена на долю, равную отношению плотностей. Массу трубки находим двумя независимыми способами: (а) правило моментов — палочка с трубкой балансирует на ребре линейки, и сдвиг точки равновесия выдаёт массу трубки; (б) закон Архимеда — палочка с трубкой плавает, и по объёму погружённой части находим общую массу.

Обозначения. Данные авторов: $M = 1{,}02 \pm 0{,}02$ г; L — длина палочки; H — длина выступающей над водой части; d — диаметр палочки; D — внешний диаметр трубки, z — её длина; y — положение центра масс палочки, x — центра масс палочки с трубкой (от торца с трубкой); h — выступающая часть палочки с трубкой.

Пункт 1. Плотность палочки.

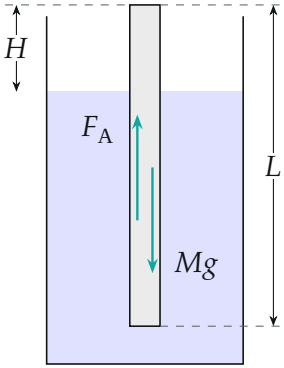
1. Условие плавания. Опускаем палочку в мерный цилиндр с водой — она плавает вертикально. Сила тяжести уравновешена силой Архимеда (второй закон Ньютона для покоящейся палочки в проекции на вертикаль):

$$\rho\, SL\, g = \rho_0\, S(L - H)\, g \quad \Rightarrow \quad \rho = \rho_0\, \frac{L - H}{L},$$

площадь сечения S сокращается. Измерено $L = 240 \pm 1$ мм, $H = 62 \pm$

1 мм:

$$\rho = 1{,}00 \cdot \frac{178}{240} = 0{,}74 \text{ г/см}^3.$$



Палочка плавает вертикально; погружённая часть $L - H$

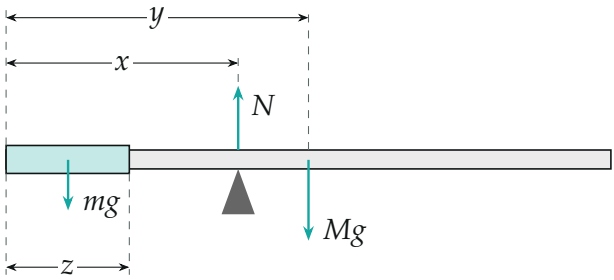
2. Погрешность. Числитель $L - H$ известен с точностью 2 мм из 178 (1,1%), L — 0,4%; относительные погрешности частного складываются: 1,5%,

$$\rho = 0{,}74 \pm 0{,}01 \text{ г/см}^3.$$

Пункт 2а. Масса трубки по правилу моментов.

3. Балансировка. Палочка однородна, её центр масс — посередине: $y = L/2 = 120 \pm 1$ мм. Надеваем трубку длиной $z = 49 \pm 1$ мм на конец палочки заподлицо и кладём палочку на ребро второй линейки, двигая до равновесия: точка опоры — центр масс системы, $x = 92 \pm 1$ мм от торца с трубкой. Правило моментов относительно точки опоры (сила реакции опоры момента не даёт; центр масс трубки — в её середине, на $z/2$ от торца):

$$mg\left(x - \frac{z}{2}\right) = Mg\,(y - x) \quad \Rightarrow \quad m = M\,\frac{y-x}{x - z/2} = 1{,}02 \cdot \frac{28}{67{,}5} = 0{,}42 \text{ г}.$$



Палочка с трубкой на ребре линейки; плечи сил mg и Mg — $x - z/2$ и $y - x$ (масштаб по данным авторов)

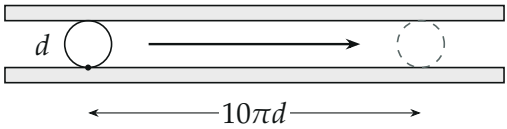
4. Погрешность. $y - x = 28 \pm 2$ мм (7%), $x - z/2 = 67{,}5 \pm 1{,}5$ мм (2%), M — 2%; итого около 11%:

$$m = 0{,}42 \pm 0{,}05 \text{ г}.$$

Пункт 2б. Масса трубки по закону Архимеда.

5. Диаметры. Диаметры малы, поэтому измеряем их прокаткой: палочку (и трубку) прокатываем между двумя линейками на 10 оборотов и меряем пройденный путь: $10\pi d = 85 \pm 1$ мм, $10\pi D = 125 \pm 1$ мм, откуда

$$d = 2{,}71 \pm 0{,}03 \text{ мм}, \qquad D = 3{,}98 \pm 0{,}03 \text{ мм}.$$



Прокатка между линейками: за 10 оборотов палочка проходит $10\pi d$

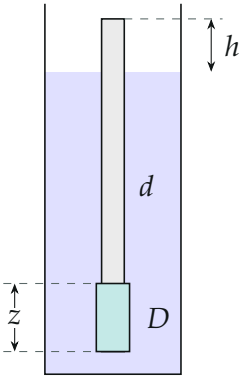
6. Условие плавания с трубкой. Палочка с трубкой плавает трубкой вниз, не касаясь дна; над водой $h = 42 \pm 1$ мм. Под водой — трубка (внешний диаметр D, длина z) и кусок палочки длиной $L - z - h$. Равновесие — сила тяжести палочки и трубки равна силе Архимеда:

$$(m + M)\, g = \rho_0\, g\, \frac{\pi}{4} \left(D^2 z + d^2 (L - z - h) \right),$$

$$m = \rho_0\, \frac{\pi}{4} \left(D^2 z + d^2 (L - z - h) \right) - M,$$

$$m = \frac{\pi}{4}(776 + 1094)\ \text{мм}^3 \cdot 1\ \frac{\text{мг}}{\text{мм}^3} - 1{,}02\ \text{г} = 1{,}47\ \text{г} - 1{,}02\ \text{г} = 0{,}45\ \text{г}.$$

Внутренность трубки занята палочкой, поэтому вода вытесняется всем объёмом цилиндра диаметра D.



Палочка с трубкой плавает трубкой вниз; над водой h

7. Погрешность. $d^2(L - z - h) = 1094 \pm 48\ \text{мм}^3$, $D^2 z = 776 \pm 28\ \text{мм}^3$; погрешность суммы $\approx 4\%$, то есть 0,06 г в первом слагаемом; вместе с $\Delta M = 0{,}02$ г:

$$m = 0{,}45 \pm 0{,}08\ \text{г}.$$

Обратите внимание. Во втором способе масса трубки — разность двух близких величин (1,47 г и 1,02 г), поэтому её относительная погрешность (18%) намного больше погрешности измеренного объёма (4%).

Проверка. Оба способа дают 0,42 и 0,45 г — совпадают в пределах погрешностей; прямое взвешивание у авторов — $0{,}44 \pm 0{,}02$ г. Плотность 0,74 г/см^3 согласуется с массой: $\frac{\pi}{4} d^2 L \cdot \rho = 1{,}38\ \text{см}^3 \cdot 0{,}74 \approx 1{,}02$ г.

Ответ. 1) $\rho = 0{,}74 \pm 0{,}01$ г/см^3; 2) $m = 0{,}42 \pm 0{,}05$ г (правило моментов), $m = 0{,}45 \pm 0{,}08$ г (закон Архимеда).