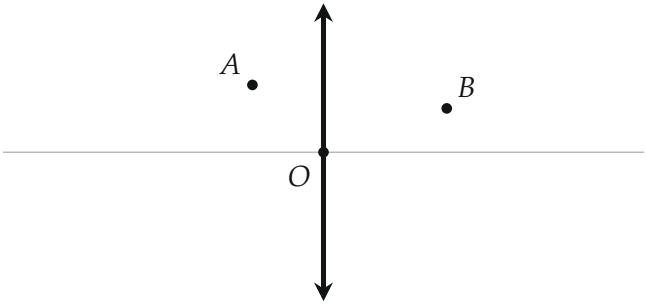
Выцветшие фокусы линзы

Задача 1. [ВсОШ 2022/23, региональный этап, 9 класс, задача 1] «Выцветшие фокусы линзы».

В архиве Снеллиуса нашли рукопись с оптической схемой. От времени чернила выцвели и остались видны только две точки, лежащие на луче, прошедшем сквозь линзу, сама линза и главная оптическая ось. Точечный источник находился на главной оптической оси на двойном фокусном расстоянии от линзы. По имеющимся данным восстановите положение фокусов линзы.



▲ **Решение. Что происходит.** Источник стоит на двойном фокусе — особая точка: его изображение тоже на двойном фокусе, по другую сторону линзы. Значит, ход луча от источника до изображения симметричен относительно плоскости линзы. Главная идея — воспользоваться этой симметрией: отразить одну из видимых точек в плоскости линзы, и она ляжет на продолжение луча с другой стороны. Класс задачи — построение по свойствам тонкой линзы.

Обозначения (рис. 2). X — источник на оси, Y — его изображение, Z — точка, где луч пересекает линзу, F — фокусное расстояние, F_1, F_2 — фокусы.

1. Линза собирающая. Видимые точки A и B лежат по разные стороны линзы. Если A — на падающем луче, а B — на прошедшем, то луч от оси идёт вверх к линзе, а после неё — вниз, к оси: линза его «прижала» к оси, т. е. она собирающая. (Если считать источник справа, рассуждение то же с переменой ролей A и B.)

2. Где изображение. Формула тонкой собирающей линзы для источника на расстоянии $2F$:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{2F} + \frac{1}{b} \quad \Rightarrow \quad b = 2F.$$

Изображение Y действительное, на оси с другой стороны, на том же расстоянии: $OX = OY = 2F$.

3. Симметрия луча. Луч проходит $X \to Z \to Y$. В треугольнике XZY высота ZO (плоскость линзы перпендикулярна оси) делит основание пополам, $OX = OY$, значит, треугольник равнобедренный и симметричен относительно прямой ZO — плоскости линзы. При отражении в этой плоскости отрезок ZY переходит в ZX. Точка B лежит на ZY, поэтому её отражение B' лежит на ZX — на одной прямой с A (рис. 2).

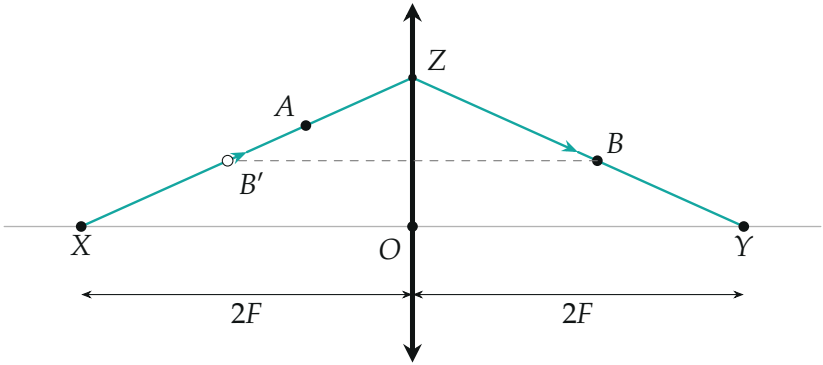


Рис. 2. Ход луча от источника X до изображения Y симметричен относительно линзы; отражение B' точки B лежит на падающем луче вместе с A.

4. Построение (рис. 3):

1. отражаем B в плоскости линзы: проводим через B перпендикуляр к линзе (параллельно оси) и откладываем по другую сторону такое же расстояние — точка B';
2. прямая AB' — падающий луч; её пересечение с осью — источник X, $OX = 2F$;
3. середина отрезка OX — фокус F_1;
4. фокус F_2 — симметрично F_1 относительно линзы, $OF_2 = OF_1$.

Для рисунка условия (в масштабе рисунка, O — начало координат, единица — 1 см): $A(-0{,}94;\ 0{,}89)$, $B(1{,}63;\ 0{,}58)$, $B'(-1{,}63;\ 0{,}58)$; прямая AB' пересекает ось при $x = -2{,}92$, так что $2F \approx 2{,}9$ см и $F \approx 1{,}46$ см.

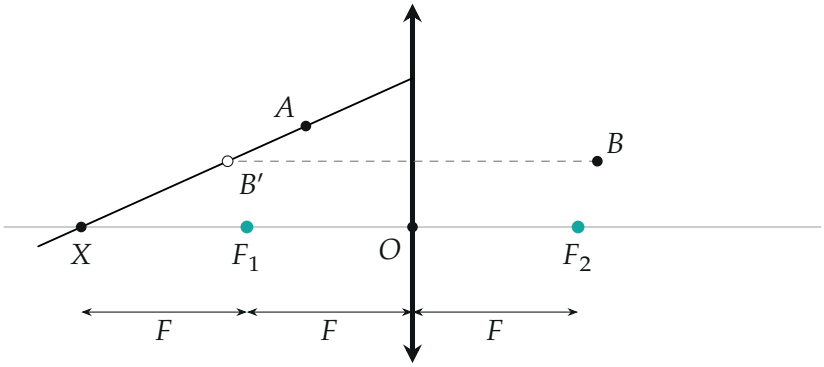


Рис. 3. Построение: B' — отражение B; прямая AB' даёт источник X на оси; F_1 — середина OX, F_2 — симметрично ему.

5. Проверка построения стандартным лучом (рис. 4). Проведём через оптический центр O побочную ось, параллельную падающему лучу XZ. Параллельные лучи собираются в точке P фокальной плоскости (через F_2) на побочной оси. Значит, прошедший луч идёт из Z через P. По координатам: побочная ось $y = 0{,}449x$ в фокальной плоскости $x = 1{,}46$ даёт $P(1{,}46;\ 0{,}656)$; прямая ZP при $x = 1{,}63$ имеет $y = 0{,}58$ — проходит точно через B и пересекает ось в $Y(2{,}92;\ 0)$. Построение согласовано.

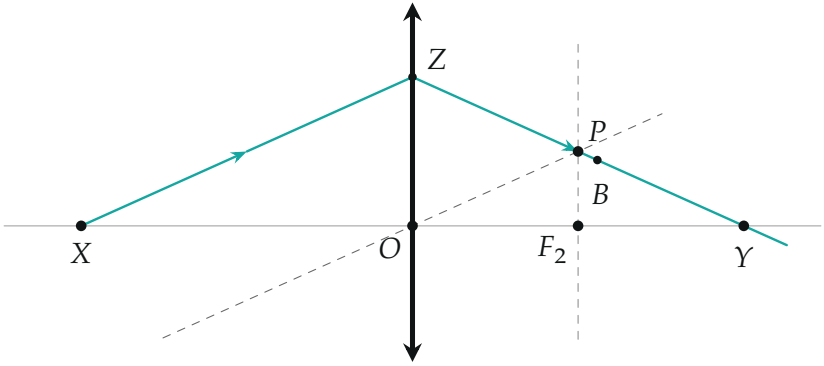


Рис. 4. Проверка: побочная ось (пунктир через O) параллельна падающему лучу и пересекает фокальную плоскость (пунктир через F_2) в точке P; прошедший луч ZP проходит через B и приходит в Y.

Обратите внимание. Точки A и B не являются источником и изображением — это просто две точки луча. Поэтому формулу линзы к ним применять нельзя; работает только симметрия хода луча при $d = 2F$.

Проверка. Построение даёт $OX = 2{,}92$ см при $OY = 2{,}92$ см — источник и изображение симметричны, как требует формула линзы при $d = 2F$. Второй способ (рис. 4) через побочную ось и фокальную плоскость независимо подтверждает, что найденные фокусы переводят падающий луч через A в прошедший через B.

Ответ. Отражаем точку B в плоскости линзы в точку B'; прямая AB' пересекает главную оптическую ось в точке X на двойном фокусном расстоянии. Середина отрезка OX — первый фокус, второй симметричен ему относительно линзы (на рисунке условия $F \approx 1{,}46$ см).