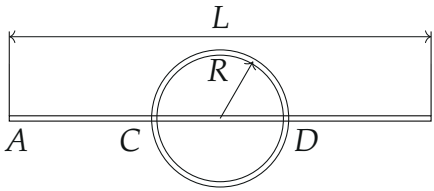
Частицы в трубах

Задача 2. [ВсОШ 2022/23, региональный этап, 9 класс, задача 2] Первая частица разгоняется с ускорением a в прямой трубе длиной L от ее конца A с нулевой начальной скоростью. Вторая частица движется с постоянной скоростью v в другой трубе, имеющей форму кольца радиуса R и расположенной непосредственно над первой трубой таким образом, что центр кольца совпадает с серединой первой трубы.



В момент пролета первой частицы через точку C, которая расположена под кольцевой трубой, вторая частица оказывается точно над первой. Второе пересечение труб (точку D) частицы тоже пролетают одновременно.

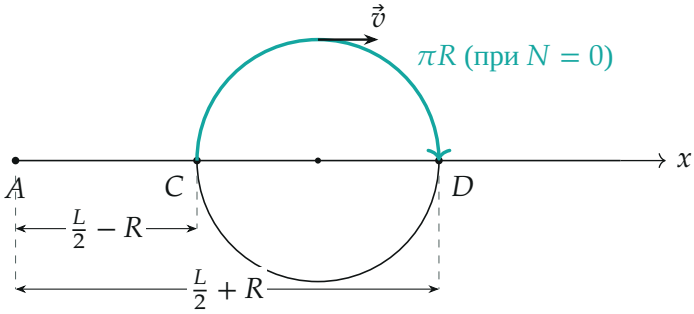
1. Как зависит скорость v от радиуса R?
2. Чему равна скорость v_1 при $R = L/2$?
3. Чему равна скорость v_2 при $R \ll L$?

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на «встречу» двух движений: одно равноускоренное по прямой, другое равномерное по окружности. Обе частицы тратят на путь от C до D *одно и то же время*. Время первой частицы найдём из закона равноускоренного движения без начальной скорости, время второй — из длины пройденной дуги; приравняем.

Обозначения. Ось x — вдоль прямой трубы от точки A; x_C, x_D — координаты точек C и D; t_C, t_D — моменты, когда первая частица проходит эти точки (отсчёт от старта в A); $\Delta t = t_D - t_C$; $N = 0, 1, 2, \ldots$ — число полных оборотов второй частицы между встречами.

1. Где лежат точки C и D. Центр кольца — над серединой трубы, $x = L/2$; точки пересечения труб отстоят от центра на радиус:

$$x_C = \frac{L}{2} - R, \qquad x_D = \frac{L}{2} + R.$$



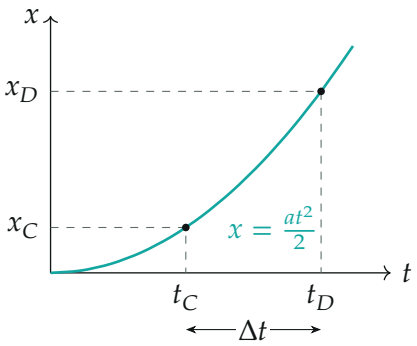
Вид сверху: точки C и D на прямой трубе; бирюзой — путь второй частицы между встречами при $N = 0$

2. Время первой частицы от C до D. Закон равноускоренного движения без начальной скорости из точки A: $x = \dfrac{at^2}{2}$, откуда момент прохождения точки с координатой x

$$t = \sqrt{\frac{2x}{a}}.$$

Применим его к точкам C и D и вычтем:

$$\Delta t = t_D - t_C = \sqrt{\frac{2}{a}}\left(\sqrt{\frac{L}{2} + R} - \sqrt{\frac{L}{2} - R}\right) = \frac{\sqrt{L + 2R} - \sqrt{L - 2R}}{\sqrt{a}}.$$



Закон движения первой частицы (посчитан для $R = 0{,}3L$): промежуток Δt между прохождением C и D

3. Время второй частицы. Над C и над D лежат диаметрально противоположные точки кольца. Чтобы из одной попасть в другую, вторая частица проходит полоборота и, возможно, ещё N полных оборотов: путь $2\pi R\left(N+\frac{1}{2}\right)$. Скорость постоянна по модулю, поэтому

$$\Delta t = \frac{2\pi R\left(N+\frac{1}{2}\right)}{v} = \frac{\pi R(2N+1)}{v}.$$

Направление обхода кольца роли не играет: оба пути из точки над C в точку над D одинаковы.

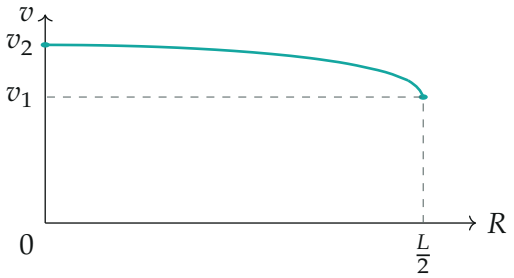
Пункт 1. Зависимость $v(R)$. Приравниваем времена пунктов 2 и 3:

$$\frac{\pi R(2N+1)}{v} = \frac{\sqrt{L+2R}-\sqrt{L-2R}}{\sqrt{a}} \quad\Rightarrow\quad v = \frac{\pi R(2N+1)\sqrt{a}}{\sqrt{L+2R}-\sqrt{L-2R}}.$$

Избавимся от разности корней в знаменателе: домножим числитель и знаменатель на сумму корней, тогда в знаменателе $(L+2R)-(L-2R) = 4R$ и R сокращается:

$$v = \frac{\pi(2N+1)\sqrt{a}\left(\sqrt{L+2R}+\sqrt{L-2R}\right)}{4}, \qquad N = 0, 1, 2, \ldots$$

Сумма $\sqrt{L+2R}+\sqrt{L-2R}$ убывает с ростом R (корень — вогнутая функция), поэтому v медленно убывает от $\frac{\pi}{2}(2N+1)\sqrt{aL}$ при $R \to 0$ до $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}(2N+1)\sqrt{aL}$ при $R = L/2$.



Зависимость $v(R)$ при $N = 0$, посчитанная по формуле ответа: $v_2 = \frac{\pi}{2}\sqrt{aL} \approx 1{,}57\sqrt{aL}$, $v_1 = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}\sqrt{aL} \approx 1{,}11\sqrt{aL}$

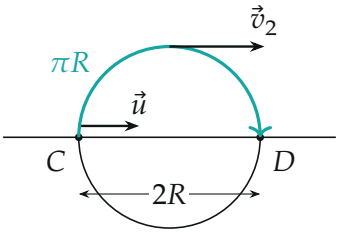
Пункт 2. $R = L/2$. Тогда $x_C = 0$: точка C совпадает с A, $\sqrt{L - 2R} = 0$, $\sqrt{L + 2R} = \sqrt{2L}$:

$$v_1 = \frac{\pi\sqrt{2L}}{4}(2N + 1)\sqrt{a}.$$

Пункт 3. $R \ll L$. Оба корня близки к $\sqrt{L}$, их сумма — к $2\sqrt{L}$:

$$v_2 = \frac{\pi\sqrt{L}}{2}(2N + 1)\sqrt{a}.$$

Смысл: маленькое кольцо стоит в середине трубы, где первая частица летит почти равномерно со скоростью $u = \sqrt{2a \cdot \frac{L}{2}} = \sqrt{aL}$. Она проходит отрезок $2R$, а вторая — полуокружность πR (при $N = 0$), поэтому $v_2 = \frac{\pi R}{2R}u = \frac{\pi}{2}\sqrt{aL}$ — тот же ответ другим способом.



Предел $R \ll L$: первая частица проходит $2R$ почти с постоянной скоростью u, вторая — полуокружность πR; длины стрелок — в отношении $v_2 : u = \pi : 2$

Обратите внимание. Между встречами вторая частица не обязана пройти ровно половину кольца: подходит любое полуцелое число оборотов $N + \frac{1}{2}$. Поэтому ответ — не одно значение, а набор скоростей с множителем $2N + 1$.

Проверка. Размерность: $\sqrt{a \cdot L}$ — $\sqrt{\text{м/с}^2 \cdot \text{м}} = \text{м/с}$. Предел $R \ll L$ совпал с оценкой «почти равномерного» движения. При $R = L/2$ первая частица стартует из самой точки встречи и в среднем движется медленнее, поэтому $v_1 < v_2$.

Ответ. 1) $v = \dfrac{\pi(2N+1)\left(\sqrt{L+2R}+\sqrt{L-2R}\right)\sqrt{a}}{4}$, где $N = 0, 1, 2, \ldots$;

2) $v_1 = \dfrac{\pi\sqrt{2L}}{4}(2N+1)\sqrt{a}$; 3) $v_2 = \dfrac{\pi\sqrt{L}}{2}(2N+1)\sqrt{a}$.