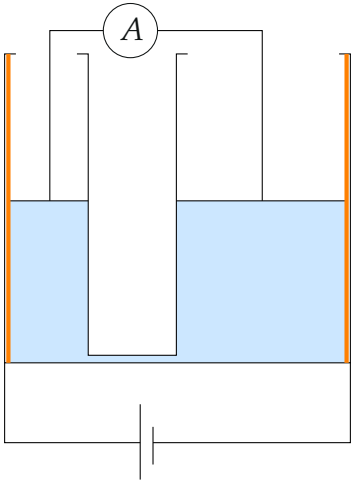
Гидростатический реостат

Задача 3. [ВсОШ 2022/23, региональный этап, 9 класс, задача 3] В боковые непроводящие стенки вертикальных сообщающихся сосудов (площади сечения сосудов $S = 100$ см^2 и $3S$) вмонтированы две одинаковых тонких однородных нихромовых проволоки. Длина проволок равна высоте сосудов. К нижним концам проволок подключена идеальная батарея с напряжением на клеммах $U = 46{,}2$ В. Сосуды имеют высоту $2h_0$ ($h_0 = 50$ см). В сосуды до уровня h_0 залита вода, которая накрыта легкими и тонкими проводящими поршнями. Поршни не пропускают воду, имеют контакт с проволоками и могут без трения передвигаться внутри сосудов, не покидая их, благодаря стопорам.



К поршням с помощью гибких проводов подключен амперметр (длина проводов позволяет поршням свободно перемещаться). Схема установки изображена на рисунке. Когда на маленький поршень кладут непроводящую гирю массой 1 кг, амперметр показывает силу тока $I_1 = 2{,}31$ А. Если же 3 таких гири положить на большой поршень, то амперметр покажет силу тока $I_2 = 2{,}1$ А.

1. Определите сопротивление амперметра R_A, при условии, что соединительные провода и поршни имеют пренебрежимо малое сопротивление.

2. Определите силу тока, который показывает амперметр, когда на поршнях отсутствуют грузы.
3. В каких пределах может меняться сила тока в собранной установке, если в распоряжении имеется широкий выбор грузов?

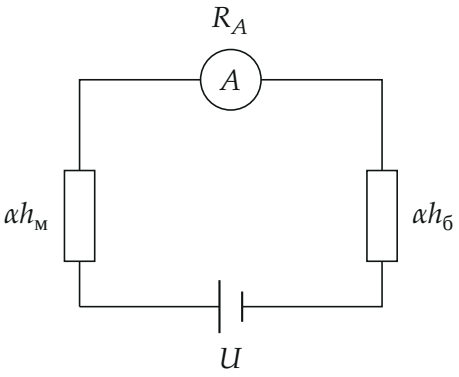
Можно считать, что соединительная трубка имеет пренебрежимо малое сечение. Проводимость воды также очень мала. Плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3.

▲ **Решение. Что происходит.** Задача из двух частей: гидростатика решает, где стоят поршни, а закон Ома — какой при этом ток. Ток идёт по проволоке от нижнего конца только до поршня, дальше — по поршню и проводу к амперметру. Значит, в цепь включены куски проволок длиной, равной высотам поршней, и сопротивление цепи зависит от *суммы* высот. Сосуды разные по сечению, поэтому при сдвиге воды сумма высот меняется — на этом и работает «реостат».

Обозначения. α — сопротивление одного метра проволоки; $h_м$ и $h_б$ — высоты малого и большого поршней над дном; $H = h_м + h_б$; $m = 1$ кг — масса гири; Δ — сдвиг большого поршня; I_0 — ток без грузов.

1. Эквивалентная схема. Батарея, кусок левой проволоки длиной $h_м$, амперметр и кусок правой проволоки длиной $h_б$ соединены последовательно; верхние части проволок над поршнями тока не несут. Вода почти не проводит, поэтому параллельного пути через неё нет. Закон Ома для всей цепи:

$$U = I\,(\alpha H + R_A)\,.$$



Эквивалентная схема: работают только куски проволок ниже поршней

2. Как сдвигаются поршни. Положим гирю на малый поршень. Он опустится на x, большой поднимется на Δ. Вода несжимаема и переливается через тонкую трубку, поэтому объём, ушедший из малого сосуда, пришёл в большой: $Sx = 3S\Delta$, $x = 3\Delta$. Разность уровней стала $3\Delta + \Delta = 4\Delta$.

Условие равновесия малого поршня (поршни лёгкие): сверху давит гиря, mg/S, снизу — избыток гидростатического давления. Давление в жидкости на уровне большого поршня одинаково в обоих сосудах (давление на большой поршень сверху — только атмосферное), поэтому

$$\frac{mg}{S} = \rho g \cdot 4\Delta \quad \Rightarrow \quad \Delta = \frac{m}{4\rho S}.$$

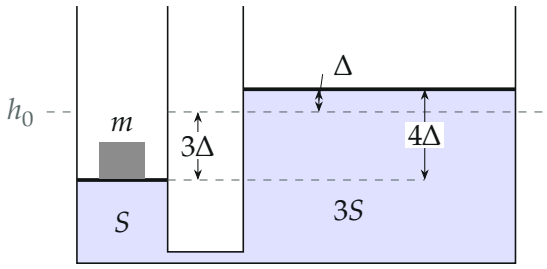
Сумма высот изменилась на $-3\Delta + \Delta = -2\Delta$:

$$H_1 = 2h_0 - \frac{m}{2\rho S}.$$

Три гири на большом поршне создают давление $\dfrac{3mg}{3S} = \dfrac{mg}{S}$ — такое же. Поршни сдвигаются на те же величины в другую сторону: большой вниз на Δ, малый вверх на 3Δ:

$$H_2 = 2h_0 + \frac{m}{2\rho S}.$$

Число: $\dfrac{m}{2\rho S} = \dfrac{1}{2 \cdot 1000 \cdot 0{,}01} = 0{,}05$ м.



Гиря на малом поршне: он опускается на 3Δ, большой поднимается на Δ, перепад уровней 4Δ держит гирю

Пункт 1. Сопротивление амперметра. Закон Ома для двух положений с гирями:

$$U = I_1\left(2\alpha h_0 + R_A - \frac{\alpha m}{2\rho S}\right), \qquad U = I_2\left(2\alpha h_0 + R_A + \frac{\alpha m}{2\rho S}\right).$$

Разделим каждое на свой ток и вычтем первое из второго — неизвестная $2\alpha h_0 + R_A$ уйдёт:

$$\frac{U}{I_2} - \frac{U}{I_1} = \frac{\alpha m}{\rho S} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{U(I_1 - I_2)\rho S}{I_1 I_2\, m},$$

$$\alpha = \frac{46{,}2 \cdot 0{,}21 \cdot 1000 \cdot 0{,}01}{2{,}31 \cdot 2{,}1 \cdot 1}\ \text{Ом/м} = 20\ \text{Ом/м}.$$

Сложим те же два уравнения, поделённые на токи:

$$\frac{U}{I_1} + \frac{U}{I_2} = 2\,(2\alpha h_0 + R_A) \quad \Rightarrow \quad 2\alpha h_0 + R_A = \frac{U(I_1 + I_2)}{2I_1 I_2} = 21\ \text{Ом},$$

$$R_A = 21 - 2 \cdot 20 \cdot 0{,}5 = 1\ \text{Ом}.$$

Пункт 2. Без грузов. Оба поршня на высоте h_0, $H = 2h_0$:

$$I_0 = \frac{U}{2\alpha h_0 + R_A} = \frac{2I_1 I_2}{I_1 + I_2} = \frac{46{,}2}{21} = 2{,}2\ \text{А}.$$

Пункт 3. Пределы тока. Пусть малый поршень стоит на высоте $h_\text{м}$. Сохранение объёма воды: $S(h_0 - h_\text{м}) = 3S(h_\text{б} - h_0)$, откуда

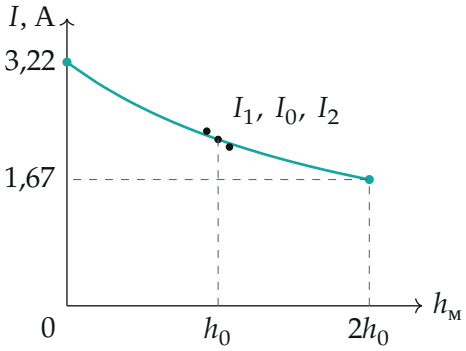
$$h_\text{б} = h_0 + \frac{h_0 - h_\text{м}}{3}, \qquad H = \frac{4}{3}h_0 + \frac{2}{3}h_\text{м}.$$

H растёт вместе с $h_\text{м}$, значит, ток наибольший при нижнем положении малого поршня ($h_\text{м} = 0$, большой при этом на высоте $\frac{4}{3}h_0 < 2h_0$ — в сосуде) и наименьший при верхнем ($h_\text{м} = 2h_0$, большой на $\frac{2}{3}h_0$). Любую

промежуточную разность уровней можно получить подходящей гирей:

$$I_{\max} = \frac{U}{\frac{4}{3}\alpha h_0 + R_A} = \frac{46{,}2}{14{,}33} \approx 3{,}22\ \text{А},$$

$$I_{\min} = \frac{U}{\frac{8}{3}\alpha h_0 + R_A} = \frac{46{,}2}{27{,}67} \approx 1{,}67\ \text{А}.$$



Ток в зависимости от высоты малого поршня (по формуле пункта 3); точки — три опыта: гиря на малом, без гирь, гири на большом

Обратите внимание. Сумма высот меняется только потому, что сечения разные: при равных сечениях один поршень опускается ровно настолько, насколько поднимается другой, и ток не менялся бы.

Проверка. Размерность $\frac{U\rho S}{Im}$: $\frac{\text{В} \cdot \text{кг/м}^3 \cdot \text{м}^2}{\text{А} \cdot \text{кг}} = \text{Ом/м}$ — верно. Ток без грузов 2,2 А лежит между $I_2 = 2{,}1$ А и $I_1 = 2{,}31$ А, как и должно: гиря на малом поршне укорачивает рабочие куски проволок, гири на большом — удлиняют.

Ответ. 1) $R_A = 1$ Ом; 2) $I_0 = \frac{2I_1I_2}{I_1 + I_2} = 2{,}2$ А; 3) от $I_{\min} \approx 1{,}67$ А до $I_{\max} \approx 3{,}22$ А.