Что так, что эдак

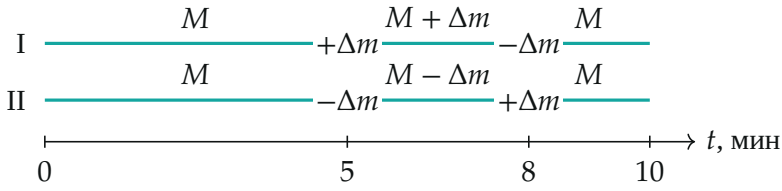
Задача 4. [ВсОШ 2022/23, региональный этап, 9 класс, задача 4] Ваня и Маша провели 2 эксперимента. В первом — десятилитровую кастрюлю, заполненную наполовину водой комнатной температуры ($t_0 = 20\,^\circ$C), грели на плитке мощностью $P = 1{,}4$ кВт в течение $\tau = 10$ минут. При этом через $\tau_1 = 5$ минут после начала эксперимента в кастрюлю, не снимая ее с плитки, долили некоторое количество воды комнатной температуры, а еще через $\tau_2 = 3$ минуты, также не снимая кастрюлю с плитки, из нее столько же воды отлили.

Во втором эксперименте при тех же начальных условиях отлив и долив поменяли местами, не меняя общее время эксперимента, моменты манипуляций и количество доливаемой и отливаемой воды.

Конечная температура воды в кастрюле в обоих экспериментах совпала.

1. Какой была масса добавляемой в экспериментах воды?
2. Какую температуру имела вода в кастрюле в конце экспериментов?
3. Какого максимального значения достигала температура воды в кастрюле в каждом из проведенных экспериментов?

Считайте, что долив и отлив воды происходят очень быстро. Тепловые потери и теплоёмкость кастрюли пренебрежимо малы, а вода в процессе экспериментов не закипала. Удельная теплоёмкость воды $c = 4{,}2$ кДж/(кг · °C), плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3.



Поясняющий рисунок: порядок долива ($+\Delta m$) и отлива ($-\Delta m$) в опытах I и II и масса воды в кастрюле на каждом этапе

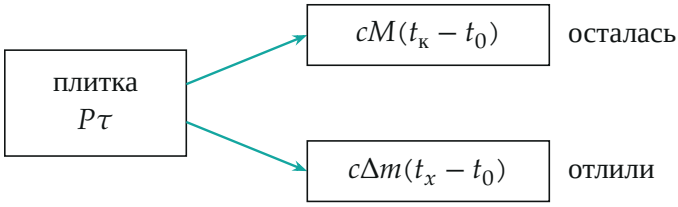
▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на уравнение теплового баланса для всего опыта сразу. В обоих опытах плитка работает одно и то же время и отдаёт одну и ту же теплоту $P\tau$; в конце в кастрюле одна и та же масса M при одной и той же температуре. Долитая вода комнатной температуры энергии «сверх t_0» не приносит, а отлитая уносит $c\Delta m(t_x - t_0)$, где t_x — температура в момент отлива. Раз всё остальное в балансе одинаково, *отлив в обоих опытах происходил при одной температуре* — это ключ к задаче.

Обозначения. $M = \rho \cdot 5\text{ л} = 5\text{ кг}$ — начальная масса воды (кастрюля 10 л заполнена наполовину); Δm — масса доливаемой (и отливаемой) воды; t_x — температура воды в момент отлива; $t_к$ — конечная температура; энергию воды отсчитываем от t_0.

1. Отлив при одной температуре. Закон сохранения энергии для воды, побывавшей в кастрюле, за весь опыт: теплота плитки идёт на нагрев воды, оставшейся в конце, и воды, которую отлили:

$$P\tau = cM(t_к - t_0) + c\Delta m(t_x - t_0).$$

$P\tau$, M, Δm и $t_к$ в обоих опытах одинаковы, поэтому одинаково и t_x.



Куда уходит теплота плитки за весь опыт; долитая вода при t_0 в баланс не входит

2. Температура отлива из опыта II. Во втором опыте первые τ_1 греется вся масса M, потом сразу отлив. Уравнение теплового баланса для первых τ_1:

$$P\tau_1 = cM(t_x - t_0) \quad \Rightarrow \quad t_x = t_0 + \frac{P\tau_1}{cM} = 20 + \frac{1400 \cdot 300}{4200 \cdot 5} = 40\,^\circ\text{C}.$$

Пункт 1. Масса долива. В первом опыте отлив — через $\tau_1 + \tau_2 =$

8 мин. До этого момента плитка нагрела воду массой $M + \Delta m$ (долитая при t_0 энергии не принесла) от t_0 до той же t_x. Баланс энергии от начала до отлива:

$$P(\tau_1 + \tau_2) = c(M + \Delta m)(t_x - t_0) \quad \Rightarrow \quad \Delta m = \frac{P(\tau_1 + \tau_2)}{c(t_x - t_0)} - M,$$

$$\Delta m = \frac{1400 \cdot 480}{4200 \cdot 20}\ \text{кг} - 5\ \text{кг} = 3\ \text{кг}.$$

Объём в опыте I доходит до 8 л — кастрюля не переполняется.

Пункт 2. Конечная температура. Из баланса пункта 1 решения:

$$t_\text{к} = t_0 + \frac{P\tau - c\Delta m(t_x - t_0)}{cM} = 20 + \frac{840\,000 - 252\,000}{21\,000} = 48\,^\circ\text{C}.$$

Пункт 3. Максимальная температура. Пройдём оба опыта по этапам; на нагреве температура растёт линейно, долив холодной воды её мгновенно понижает, отлив не меняет.

Опыт I: за 5 мин 5 кг нагрелись до 40 °C; после долива 3 кг смесь (уравнение теплового баланса смешения)

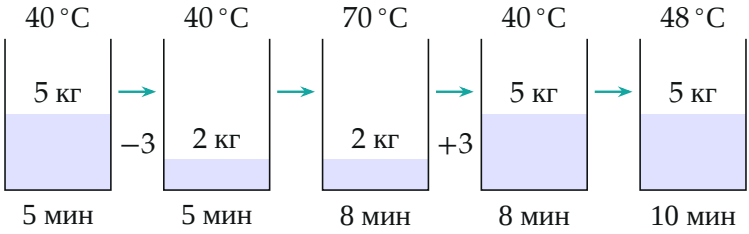
$$t' = \frac{M \cdot 40 + \Delta m \cdot 20}{M + \Delta m} = \frac{200 + 60}{8} = 32{,}5\,^\circ\text{C};$$

за 3 мин 8 кг нагрелись на $\frac{1400 \cdot 180}{4200 \cdot 8} = 7{,}5\,^\circ\text{C}$ до 40 °C (как и должно быть по пункту 1); после отлива 5 кг за 2 мин — ещё на 8 °C, до 48 °C. Максимум — в конце: 48 °C.

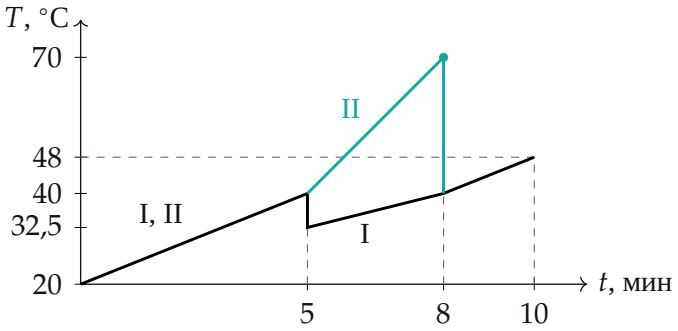
Опыт II: за 5 мин — 40 °C; отлили 3 кг, осталось 2 кг, за 3 мин они нагрелись на

$$\frac{P\tau_2}{c(M - \Delta m)} = \frac{1400 \cdot 180}{4200 \cdot 2} = 30\,^\circ\text{C},$$

до $t_{\max 2} = 70\,^\circ\text{C}$; после долива $\frac{2 \cdot 70 + 3 \cdot 20}{5} = 40\,^\circ\text{C}$, за 2 мин — до 48 °C. Максимум — перед доливом: 70 °C.



Опыт II по этапам: отлили 3 кг при 40 °C, оставшиеся 2 кг нагрелись до 70 °C, долили 3 кг при 20 °C (смесь 40 °C), нагрели до 48 °C



Температура воды в опыте I (чёрный) и II (бирюзовый; до 5 мин и после 8 мин совпадает с I), посчитанная по этапам; вертикальные отрезки — долив холодной воды

Обратите внимание. В опыте II максимум не в конце, а перед доливом: на этапе с 2 кг вода греется в 2,5 раза быстрее, чем 5 кг.

Проверка. Второй способ для пункта 2 — прямой расчёт по этапам дал 48 °C в обоих опытах. Размерность $\frac{P\tau}{cM}$: $\frac{\text{Вт·с}}{\text{Дж/(кг·°C)·кг}} = $ °C. Вода нигде не закипает ($70 < 100$).

Ответ. 1) $\Delta m = 3$ кг; 2) $t_к = 48$ °C; 3) в первом эксперименте 48 °C (в конце), во втором 70 °C (перед доливом).