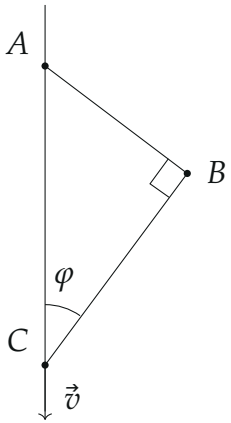
Движение по спице

Задача 5. [ВсОШ 2022/23, региональный этап, 9 класс, задача 5] Материальные точки B и C связаны нерастяжимыми нитями AB и BC. Точка C может скользить по неподвижной длинной вертикальной спице, на которой также закреплён конец A нити AB. В момент, показанный на рисунке, нить BC образует угол $\varphi = 30°$ с вертикалью и перпендикулярна нити AB, скорость точки C направлена вниз и равна v, тангенциальное ускорение точки B равно a_τ, и точка B движется в плоскости рисунка. Нити натянуты. Оказалось, что ускорение точки C в рассматриваемый момент равняется нулю.



1. Определите модуль скорости v_B точки B в рассматриваемый момент.
2. Определите длину l_{BC} нити BC.
3. Определите модуль ускорения a_B точки B в рассматриваемый момент.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на кинематику связей: нерастяжимые натянутые нити заставляют точки двигаться по окружностям. Точка B в неподвижной системе движется по окружности вокруг A, а в системе отсчёта точки C — по окружности вокруг C. Из первого получаем направление скорости и нормальное ускорение, из второго — длину

BC. Связывает две системы то, что $\vec{a}_C = 0$: в этот момент ускорения в обеих системах одинаковы.

Обозначения. $\vec{v}$ — скорость точки C (вниз); $\vec{v}_B$ — скорость B в неподвижной системе; $\vec{v}\,'_B$ — скорость B относительно C; a_τ — тангенциальное ускорение B (вдоль её скорости, т. е. вдоль BC), a_n — нормальное (к A).

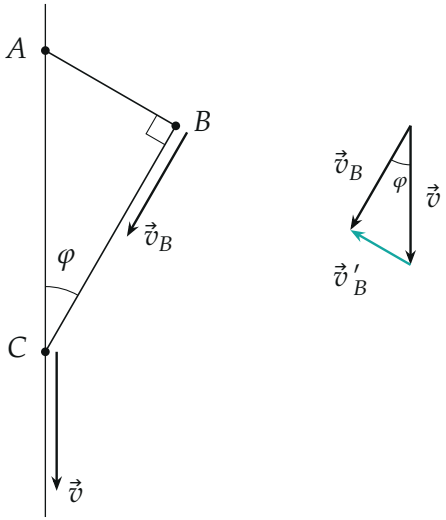
Пункт 1. Скорость v_B.

1. Направление $\vec{v}_B$. Точка A закреплена, нить AB натянута, поэтому B движется по окружности радиуса l_{AB} с центром A. Скорость при движении по окружности перпендикулярна радиусу AB, а $BC \perp AB$ — значит, $\vec{v}_B$ направлена вдоль нити BC.

2. Нерастяжимость нити BC. Длина натянутой нити не меняется, поэтому проекции скоростей её концов на нить равны. Проекция $\vec{v}$ на прямую BC равна $v\cos\varphi$, а $\vec{v}_B$ целиком лежит на этой прямой:

$$v_B = v\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}\,v.$$

Проекция $\vec{v}$ на BC направлена от B к C, значит, B движется к спице вдоль нити BC.



Слева: скорость B направлена вдоль нити BC. Справа: сложение скоростей $\vec{v}_B = \vec{v} + \vec{v}\,'_B$; длины стрелок — в масштабе: $v_B = v\cos 30°$, $v'_B = v\sin 30°$

3. Второй способ — система отсчёта точки C. Перейдём в систему, движущуюся поступательно вместе с C. Закон сложения скоростей: $\vec{v}_B = \vec{v}\,'_B + \vec{v}$. В этой системе C покоится, нить BC натянута — B движется по окружности вокруг C, и $\vec{v}\,'_B \perp BC$. Вектор $\vec{v}_B$ идёт вдоль BC, поэтому треугольник скоростей прямоугольный с гипотенузой $\vec{v}$ и углом φ между $\vec{v}$ и $\vec{v}_B$:

$$v_B = v\cos\varphi, \qquad v'_B = v\sin\varphi = \frac{v}{2}.$$

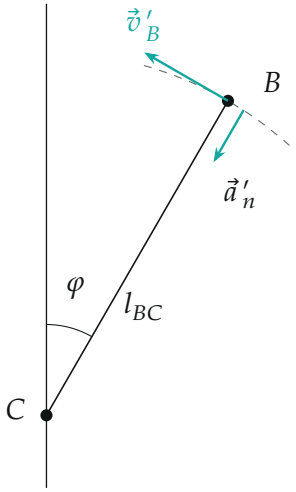
Пункт 2. Длина нити BC.

4. Ускорения в двух системах. Система C движется поступательно, поэтому $\vec{a}_B = \vec{a}\,'_B + \vec{a}_C$. По условию $\vec{a}_C = 0$, значит, в этот момент $\vec{a}\,'_B = \vec{a}_B$ — ускорение точки B одинаково в обеих системах.

5. Проекция на нить BC. В системе C точка B движется по окружности радиуса l_{BC}, и проекция её ускорения на радиус BC (к центру C) — нормальное ускорение $\dfrac{(v'_B)^2}{l_{BC}}$. В неподвижной системе проекция того же ускорения на BC — это тангенциальное ускорение a_τ (скорость B направлена вдоль BC). Приравниваем:

$$a_\tau = \frac{(v\sin\varphi)^2}{l_{BC}} \quad \Rightarrow \quad l_{BC} = \frac{v^2\sin^2\varphi}{a_\tau} = \frac{v^2}{4a_\tau}.$$

Знак: проекция на BC направлена к C, то есть по скорости $\vec{v}_B$ — точка B в этот момент разгоняется.



В системе отсчёта точки C: B идёт по окружности вокруг C со скоростью $v'_B = v\sin\varphi$; нормальное ускорение направлено к C и равно a_τ

Пункт 3. Полное ускорение a_B.

6. Нормальное ускорение в неподвижной системе. В неподвижной системе B идёт по окружности радиуса l_{AB} вокруг A, нормальное ускорение направлено к A:

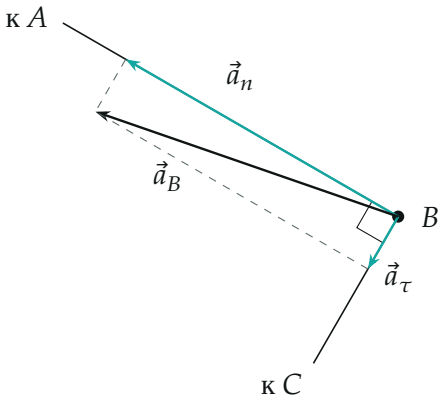
$$a_n = \frac{v_B^2}{l_{AB}}.$$

Из прямоугольного треугольника ABC (прямой угол при B, угол φ при C): $l_{AB} = l_{BC}\operatorname{tg}\varphi$. Подставим v_B и l_{BC}:

$$a_n = \frac{v^2\cos^2\varphi\cdot a_\tau}{v^2\sin^2\varphi\operatorname{tg}\varphi} = a_\tau\operatorname{ctg}^3\varphi = 3\sqrt{3}\,a_\tau.$$

7. Полное ускорение. Составляющие a_τ (вдоль BC) и a_n (вдоль BA) перпендикулярны, по теореме Пифагора

$$a_B = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = a_\tau\sqrt{1+\operatorname{ctg}^6\varphi} = a_\tau\sqrt{1+27} = 2\sqrt{7}\,a_\tau \approx 5{,}3\,a_\tau.$$



Ускорение B в неподвижной системе: $a_n = 3\sqrt{3}\,a_\tau$ к центру A и a_τ вдоль скорости, длины стрелок — в масштабе

Обратите внимание. Нормальное ускорение в системе C и тангенциальное в неподвижной системе — одна и та же проекция одного и того же вектора, но только потому, что $\vec{a}_C = 0$. Без этого условия к ускорению добавился бы $\vec{a}_C$.

Проверка. Размерности: $[l_{BC}] = \frac{\text{м}^2/\text{с}^2}{\text{м}/\text{с}^2} = \text{м}$, $[a_B] = [a_\tau]$. Предел $\varphi \to 90°$: нить BC горизонтальна, $\cos\varphi \to 0$ — скорость B обращается в ноль, $a_n \to 0$ и $a_B \to a_\tau$, как и должно быть для точки, которая только трогается с места.

Ответ. 1) $v_B = v\cos\varphi = \dfrac{v\sqrt{3}}{2}$; 2) $l_{BC} = \dfrac{v^2\sin^2\varphi}{a_\tau} = \dfrac{v^2}{4a_\tau}$; 3) $a_B = a_\tau\sqrt{1+\operatorname{ctg}^6\varphi} = 2\sqrt{7}\,a_\tau$.