Звук в сосуде

Задача 1. [ВсОШ 2022/23, заключительный этап, 11 класс, практический тур, задача 1] «Звук в сосуде».

Оборудование. цилиндрическая полипропиленовая трубка; мерный цилиндр (объём 100 мл); мерный цилиндр (объём 50 мл, диаметр 22,5 мм); стакан с водой (200 мл); компьютер с установленной программой анализа звукового спектра; встроенный в компьютер микрофон; миллиметровая бумага А4 для построения графиков.

Теоретическая справка. При распространении звуковых волн в газе частицы воздуха колеблются вдоль направления распространения звуковой волны (продольные волны). Это приводит к локальным изменениям плотности газа ρ и его давления p. В гармонических звуковых волнах, распространяющихся вдоль оси Ox, изменение давления Δp по отношению к равновесному зависит от координаты x и от времени t по закону

$$\Delta p(x,t) = p_0 \cos(\omega t \pm kx), \qquad (1)$$

где p_0 — амплитуда колебаний давления. Знаки «+» и «−» в аргументе косинуса соответствуют двум направлениям распространения волны («−» в положительном направлении, «+» в отрицательном). Частота колебаний f, циклическая частота ω, волновое число k, длина волны λ, скорость звука c связаны соотношениями

$$\omega = 2\pi f, \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \qquad c = \lambda f.$$

Уравнение (1) представляет собой уравнение плоской бегущей волны. В случае взаимодействия или интерференции двух встречных плоских волн возникает колебательный процесс, который называется стоячей волной. При сложении уравнений для двух бегущих навстречу волн одинаковой амплитуды получается уравнение стоячей волны

$$\Delta p(x,t) = 2p_0 \cos(kx) \cos(\omega t).$$

Здесь выражение $2p_0 \cos(kx)$ представляет собой амплитуду колебаний

давления в точке пространства с координатой x. В точках, координаты которых удовлетворяют условию $|\cos(kx)| = 1$ или

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm n\pi, \qquad (n = 0, 1, 2 \ldots), \qquad (2)$$

амплитуда колебаний достигает максимального значения. Такие точки называются пучностями волны, их координаты равны $x = \pm n\frac{\lambda}{2}$. В точках, для которых $\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) = 0$ или

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi, \qquad (n = 0, 1, 2 \ldots), \qquad (3)$$

амплитуда колебаний равна нулю. Такие точки называются узлами стоячей волны, их координаты равны $x = \pm\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}$. Отметим, что точки, соответствующие узлам давления, являются пучностями перемещений частиц среды, в которой возбуждена стоячая волна. Наоборот, в точках с пучностями давлений наблюдаются узлы волны для перемещений частиц.

Звуковые волны в газах обычно представляют сумму колебаний с множеством различных частот. Одной из основных характеристик звуковых колебаний является спектр. Под спектром понимают совокупность гармонических колебаний различных частот, на которые может быть разложено сложное колебательное движение. График спектра представляет собой функцию, описывающую зависимость амплитуды гармоник от их частот. Один из интересных объектов при изучении звуковых колебаний — резонатор в виде трубы, заполненной воздухом, открытой с обоих концов, либо закрытой с одного конца. Воздух, ограниченный объёмом трубы, является колебательной системой. Как любая колебательная система, выведенный из положения равновесия воздух внутри трубы совершает свободные колебания, называемые собственными или нормальными колебаниями. Частоты, на которых система совершает нормальные колебания, называются собственными частотами или нормальны-

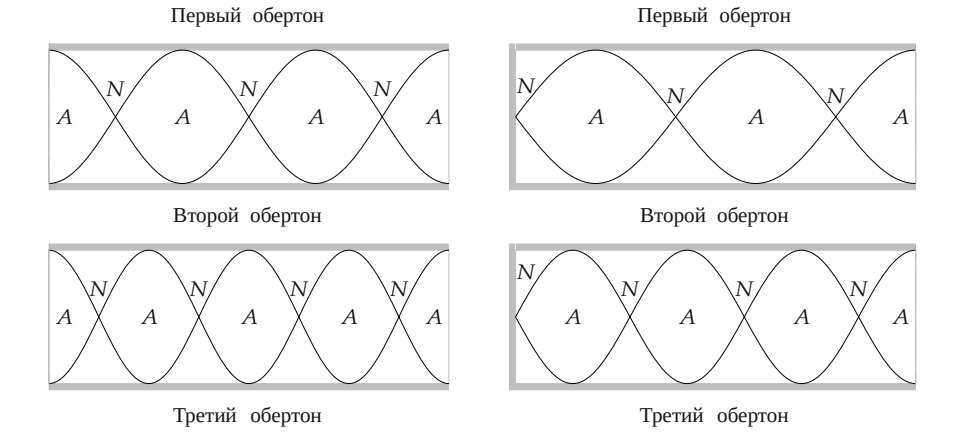
ми модами. При возбуждении звуковых колебаний у открытого конца трубы воздух в трубе совершает колебания с частотами, соответствующими собственным. Спектр собственных колебаний зависит от того, открыт или закрыт второй край трубы. Если оба конца трубы открыты, то в трубе возникают стоячие волны, для которых узлы давления располагаются на концах трубы. Длина таких волн соответствует условию

$$L = n\frac{\lambda}{2}, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

где L — длина трубы. Для закрытой с одного конца трубы стоячие волны характеризуются пучностью давления (узлом для смещения частиц) на закрытом конце трубы и узлом давления на открытом. В этом случае связь между длиной трубы и длиной волны определяется выражением

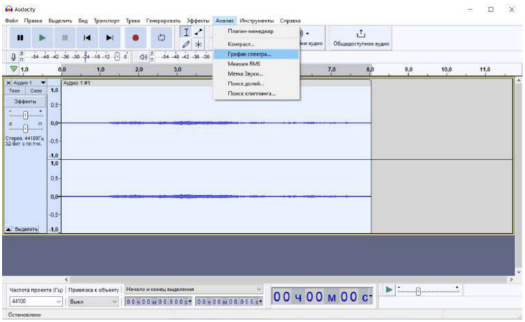
$$L = n\frac{\lambda}{4}, \qquad (n = 1, 3, 5, \ldots).$$

Для наглядности ниже представлены схемы первых гармоник для открытой и закрытой труб. Гармоника, соответствующая самой низкой собственной частоте (самой большой длине волны), называется основным (нулевым) обертоном, далее с увеличением частоты следуют первый, второй и так далее обертона. На схемах представлены стоячие волны смещения частиц. Буквы N на схемах соответствуют нулевому смещению частиц (узлам стоячей волны смещения), буквы A — максимальной амплитуде стоячей волны смещения.

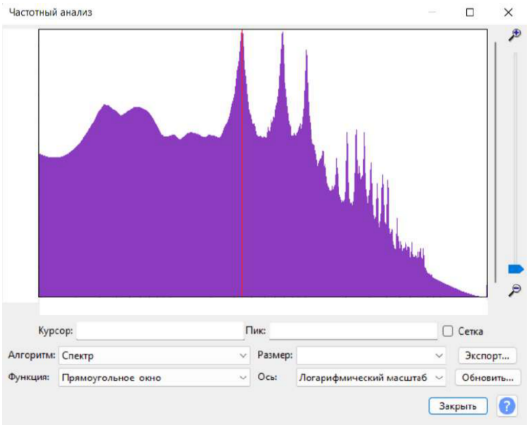


В нашей работе при анализе спектра звука в цилиндрических трубах предлагается использовать программу Audacity, установленную на вашем компьютере. Для возбуждения звуковых колебаний следует продувать воздух вблизи открытого конца трубки. Делать нужно это так, чтобы получалось достаточно громко. Проделайте несколько измерений для выявления лучших условий, дающих хорошую картину пиков. Старайтесь располагать цилиндры и трубку поблизости с компьютером, но не направляйте поток воздуха на сам компьютер. Для начала записи нажмите на характерную красную кнопку и остановите после 5–10 секунд непрерывного выдувания.

Для анализа спектра нужно выделить либо всю дорожку, либо её часть и выбрать в меню следующий пункт (см. рисунок 2):



На рисунке 3 в качестве примера представлен спектр звукового сигнала, зарегистрированный при продувании воздуха вблизи открытого конца трубки, полученный с помощью этой программы.



На графике хорошо выделяются пики, соответствующие частотам стоячих волн в цилиндре. Чтобы понять, каким значениям n в формулах (2) и (3) они соответствуют, воспользуйтесь приблизительным значением скорости звука $c = 340$ м/с. Один из параметров, который вы можете регулировать для получения оптимальной картины, — «Размер», который отвечает за степень дискретизации спектра: при уменьшении «Размера» пики сглаживаются и снижается точность определения положения их максимума, а при большом «Размере» появляются дополнительные пики, не соответствующие резонансным частотам.

1. Создайте папку на рабочем столе, назвав её, используя следующий шаблон: AAMM (AA — номер аудитории, например 03 или 12, MM — номер вашего места, например 05 или 13). Получите спектр звуковых колебаний в трубке ПВХ, длина которой $L = (50{,}0 \pm 0{,}4)$ см, при открытых концах. Сохраните его, нажав на кнопку «Экспорт», в созданную вами папку, назвав файл по шаблону 1EX, где X — порядковый номер спектра в данном пункте задачи. Для этого пункта требуется выполнить серию измерений (не менее 3). **Внимание!** Сохраняйте только те спектры, которые

будут использованы в решении. Все используемые вами данные должны быть подтверждены файлом со спектром, только они будут оценены. Используя представления о спектре стоячих волн, возникающих в трубке, уточните скорость звука в воздухе при температуре помещения. Строить график в этом и в следующем пунктах не нужно.

2. Повторите п. 1 для трубки с одним закрытым концом. Спектры для этого пункта сохраняйте по шаблону 2EX, где X — порядковый номер спектра в данном пункте задачи. Сравните полученные результаты и оцените их погрешность. Для этого пункта требуется выполнить серию измерений (не менее 3).
3. Исследуйте изменение спектра стоячих волн, возникающих в мерном цилиндре (100 мл) в зависимости от объёма воды в нём. Для этого рассматривайте только один из пиков, соответствующий основному резонансу. Спектры для этого пункта сохраняйте по шаблону 3EX, где X — порядковый номер спектра в данном пункте задачи. Предложите график зависимости измеряемых величин, по данным которого определите высоту H и внутренний диаметр D мерного цилиндра и оцените погрешность полученных результатов. Измерения проводите в пределах шкалы мерного цилиндра, не менее 5 значений.
4. Вообще говоря, частоты стоячих волн в цилиндрах зависят не только от длины цилиндра, но и от его диаметра. Узлы и пучности располагаются не точно по краям цилиндров. Эмпирические исследования показывают, что с неплохой точностью эффективная длина цилиндра $L_{эфф}$ может быть получена при использовании формулы

$$L_{эфф} = L + \beta \cdot D,$$

где D — внутренний диаметр цилиндра, β — безразмерный коэффициент. Исследуйте зависимость $L_{эфф}$ для мерного цилиндра объёмом 50 мл при разных объёмах воды в нём. Для этого рассматривайте только один из пиков, соответствующий основному резонансу. Спектры для этого пункта сохраняйте по шаблону 4EX, где X — порядковый номер спектра в данном пункте задачи. Измере-

ния проводите в пределах шкалы мерного цилиндра, не менее 5 значений. Оцените погрешность полученных величин.

5. Используя полученные экспериментальные данные, постройте график зависимости, по которому определите значение β в формуле для $L_{\text{эфф}}$. В вычислениях используйте полученную ранее скорость звука. Если же выполнить первый пункт не удалось, то примите скорость звука равной $c = 340$ м/с. Укажите это в решении.

▲ **Решение. Что происходит.** Воздух в трубке — колебательная система. Продувая воздух у края, мы возбуждаем шум со всеми частотами сразу, а трубка «выбирает» из него только свои собственные: на них в ней устанавливаются стоячие волны, и в спектре вырастают пики. Главная идея: положение пиков связано с длиной трубки и скоростью звука, поэтому по спектру находим c, а в цилиндре с водой частота становится «линейкой» — по ней измеряем длину воздушного столба и размеры самого цилиндра. Везде работает одно условие резонанса: на длине столба укладывается целое число половин (открытые концы) или нечётное число четвертей (один конец закрыт) длины волны.

Обозначения. L — длина трубки; f_n — частота пика; Δf — расстояние между соседними пиками; c — скорость звука; V — объём воды; S, d — площадь и диаметр сечения цилиндра на 100 мл; D — диаметр цилиндра на 50 мл; L_0 — эффективная длина столба пустого цилиндра на 100 мл; h — геометрическая высота столба; $L_{\text{эфф}}$ — эффективная длина; β — коэффициент поправки на конец.

Пункт 1. Открытая трубка. Дуем у края и записываем 5–10 с звука; по записи строим спектр. Опыт повторяем три раза: по трём записям видно, какие пики настоящие, а какие случайные. На обоих концах открытой трубки — узлы давления, поэтому в ней укладывается целое число полуволн:

$$L = n\frac{\lambda}{2}, \quad \lambda = \frac{c}{f} \quad \Longrightarrow \quad f_n = n\frac{c}{2L}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

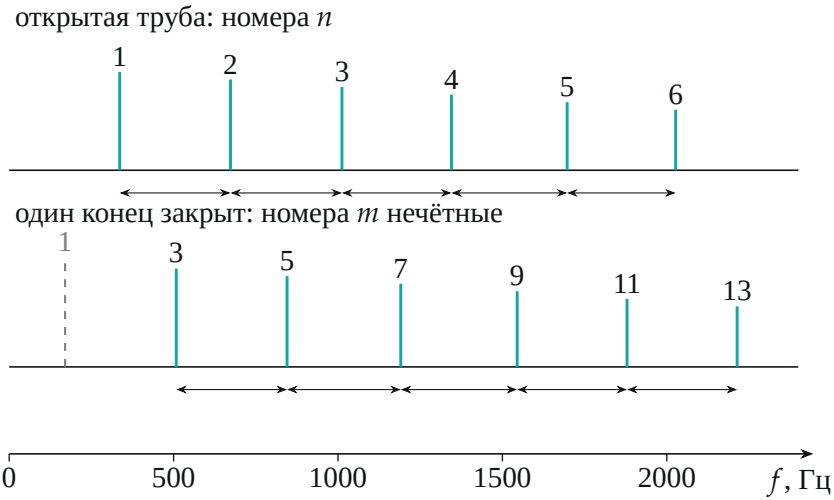
Номера пиков определяем по приближённому $c = 340$ м/с: первая ча-

стота $c/(2L) = 340$ Гц, и первый пик, 336 Гц, — это $n = 1$. Скорость звука находим не по одной частоте, а по расстоянию между соседними пиками:

$$\Delta f = f_{n+1} - f_n = \frac{c}{2L} \quad \Longrightarrow \quad c = 2L\,\Delta f.$$

Зачем так: если трубка «эффективно» длиннее на поправку у концов (её исследует п. 4), все пики по-прежнему кратны одной частоте $c/2L_{\text{эфф}}$, а разности от точности номеров не зависят. Результаты трёх записей:

n	f_1, Гц	f_2, Гц	f_3, Гц	f_n (среднее), Гц	Δf, Гц
1	336	338	333	336	—
2	673	672	675	673	337
3	1016	1013	1006	1012	339
4	1348	1339	1348	1345	333
5	1695	1699	1698	1697	352
6	2037	2017	2027	2027	330



Измеренные пики и расстояния Δf между ними (стрелки); числа над пиками — их номера. Пунктир — ожидаемый первый пик закрытой трубки, которого в таблице измерений нет. Среднее $\overline{\Delta f} = 338$ Гц, разброс одного расстояния ≈ 8 Гц ($\varepsilon_{\Delta f} \approx 2{,}5\,\%$); длина известна с $\varepsilon_L = 0{,}4/50 = 0{,}8\,\%$.

Относительные погрешности складываем:

$$c_{\text{откр}} = 2L\,\overline{\Delta f} = 2 \cdot 0{,}500\ \text{м} \cdot 338\ \text{Гц} = 338\ \text{м/с}, \qquad \varepsilon_c = \varepsilon_L + \varepsilon_{\Delta f} \approx 3\,\%,$$

$$\boxed{c_{\text{откр}} = (338 \pm 11)\ \text{м/с}}$$

МНК по всем шести пикам ($f_n = n\,c/2L$) даёт тот же $c = 339$ м/с; формальная ошибка МНК мала ($\approx 0{,}3\,\%$), но не учитывает ширину пика и поправку на концы, поэтому погрешность берём по разбросу одного расстояния.

Обратите внимание: пропущенный пик сдвинет все номера. Поэтому первый пик сверяем с оценкой $c/(2L)$, а считаем по разностям.

Пункт 2. Один конец закрыт. На закрытом конце — пучность давления, на открытом — узел: укладывается нечётное число четвертей волны,

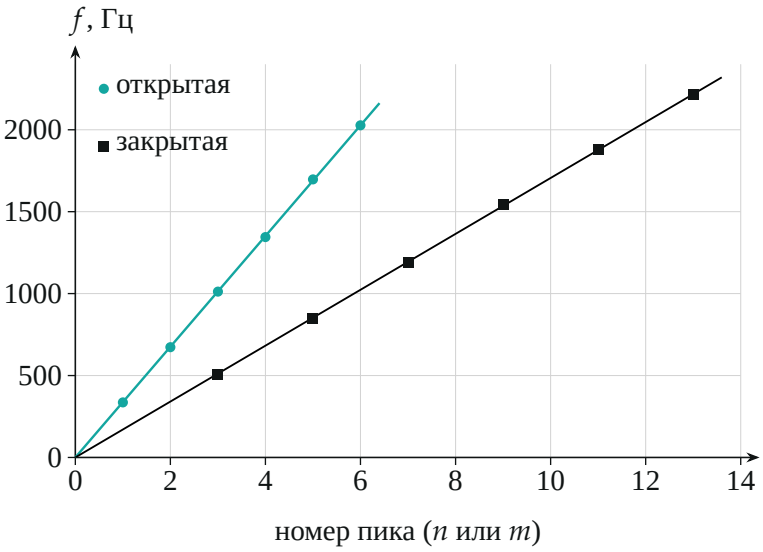
$$L = m\,\frac{\lambda}{4}, \quad m = 1, 3, 5, \ldots \implies f_m = m\,\frac{c}{4L}, \qquad f_{m+2} - f_m = \frac{c}{2L} = \Delta f.$$

Основной тон $c/(4L) \approx 170$ Гц вдвое ниже, чем у открытой трубки, и на записи тонет в шуме; в таблицу вошли пики $m = 3, 5, \ldots, 13$ ($508/170 = 3{,}0$, $845/170 = 5{,}0$ и так далее). Расстояние между пиками прежнее, обработка та же:

m	f_1, Гц	f_2, Гц	f_3, Гц	f_m (среднее), Гц	Δf, Гц
3	506	506	511	508	—
5	840	845	851	845	337
7	1205	1179	1190	1191	346
9	1545	1550	1540	1545	354
11	1873	1879	1884	1879	334
13	2207	2218	2218	2214	335

Среднее $\overline{\Delta f} = 341$ Гц, разброс ≈ 9 Гц ($2{,}5\,\%$), $\varepsilon_c \approx 3\,\%$:

$$\boxed{c_{\text{закр}} = 2L\,\overline{\Delta f} = (341 \pm 11)\ \text{м/с}}$$

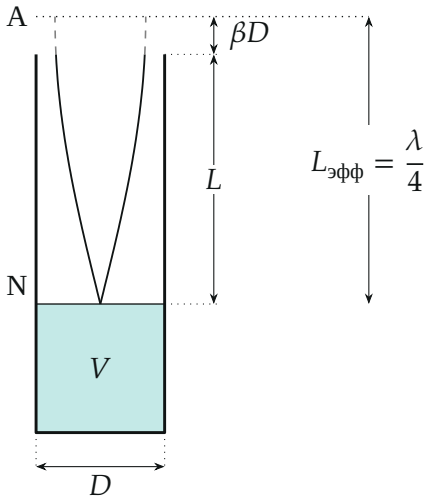


Частота пика против его номера: у открытой трубки $f_n = n\,c/(2L)$, у закрытой $f_m = m\,c/(4L)$; обе прямые идут из начала координат. Результаты 338 и 341 м/с различаются на 3 м/с — втрое меньше погрешности, поэтому дальше берём среднее $c = 340$ м/с с погрешностью 3 %. Для закрытой трубки МНК по $f_m(m)$ даёт наклон $171{,}2 \pm 0{,}8$ Гц, $c = 4L \cdot 171{,}2 = 342$ м/с — тоже в пределах погрешности.

Пункт 3. Цилиндр с водой: высота и диаметр. Цилиндр с водой — та же трубка с одним закрытым концом: у поверхности воды воздух неподвижен (узел смещения, пучность давления), у отверстия — узел давления. Основному резонансу отвечает четверть волны:

$$L_{\text{эфф}} = \frac{c}{4f} = L_0 - \frac{V}{S},$$

где V/S — высота налитой воды, а L_0 — длина столба пустого цилиндра.

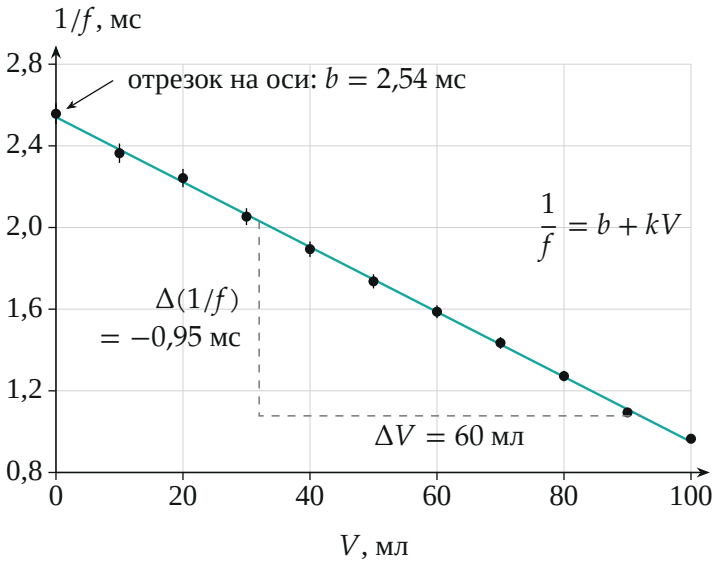


Цилиндр с водой: у воды узел смещения (N), у открытого конца — пучность (A) чуть за краем, на расстоянии βD от него. Зависимость $f(V)$ — гипербола; чтобы получить параметры, выпрямляем её графиком $1/f$ от V:

$$\frac{1}{f} = \frac{4L_0}{c} - \frac{4}{cS}V = b + kV, \qquad b = \frac{4L_0}{c}, \quad k = -\frac{4}{cS}.$$

Объём отмеряем по шкале цилиндра, одиннадцать значений $0,\ 10, \ldots, 100$ мл; на каждом — спектр и частота основного пика:

V, мл	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
f, Гц	391	423	446	487	528	576	630	697	786	914	1036
$1/f$, мс	2,56	2,36	2,24	2,05	1,89	1,74	1,59	1,44	1,27	1,09	0,97



Зависимость $1/f$ от объёма воды; усы — погрешность 2 % по частоте; прямая — МНК. Точки лежат на прямой — формула подтверждена. МНК по одиннадцати точкам:

$$k = (-15{,}9 \pm 0{,}8)\ \text{с/м}^3, \qquad b = (2{,}54 \pm 0{,}05)\ \text{мс}.$$

Формальная ошибка наклона по МНК — 0,14 с/м^3 ($\approx$ 1 %); округляем до 5 % с запасом: положение пика ограничено шагом дискретизации спектра, и погрешность частоты действует на все точки согласованно. Из наклона:

$$S = \frac{4}{c\,|k|} = \frac{4}{340 \cdot 15{,}9} = 7{,}40{\cdot}10^{-4}\ \text{м}^2, \qquad d = \sqrt{\frac{4S}{\pi}} = \sqrt{\frac{16}{\pi\, c\,|k|}} = 30{,}7\ \text{мм}.$$

Диаметр зависит от c и k в степени $-\frac{1}{2}$, поэтому $\varepsilon_d = \frac{1}{2}(\varepsilon_k + \varepsilon_c) = \frac{1}{2}(5 + 3)\,\% \approx 4\,\%$:

$$\boxed{d = (31 \pm 1)\ \text{мм}}$$

Отрезок на оси даёт длину столба пустого цилиндра, $L_0 = bc/4$, $\varepsilon_{L_0} =$

$\varepsilon_b + \varepsilon_c = 2 + 3 \approx 5\,\%$:

$$\boxed{L_0 = \frac{2{,}54 \cdot 10^{-3} \cdot 340}{4} = (21{,}6 \pm 1{,}1)\ \text{см}}$$

Это эффективная длина: она включает поправку βd на конец, поэтому геометрическая высота цилиндра $H = L_0 - \beta d$ меньше. Когда в п. 5 найдём β, получим $H \approx 20{,}1$ см — в пределах погрешности те же (21 ± 1) см.

Пункт 4. Цилиндр на 50 мл: эффективная длина. Измеряем f при $V = 0,\ 10,\ \ldots,\ 50$ мл и считаем $L_{\text{эфф}} = c/(4f)$. Чтобы увидеть поправку βD, нужна и настоящая высота столба $h = h_0 - V/S$. Площадь берём из самих измерений: $c/(4f)$ линейно зависит от V с наклоном $-1/S$, как в п. 3. Найденный наклон $-0{,}213 \pm 0{,}003$ см/мл даёт

$$S = \frac{1}{0{,}213} = 4{,}69\ \text{см}^2\ (\varepsilon_S = 1{,}5\,\%), \qquad D = \sqrt{\frac{4S}{\pi}} = 2{,}44\ \text{см}.$$

Диаметр 22,5 мм из перечня оборудования таким наклоном не подтверждается: он дал бы $S = 3{,}98$ см^2 и наклон $-0{,}25$ см/мл (расхождение 15 % при погрешности 1,5 %), поэтому берём диаметр из данных.

Высоту пустого цилиндра находим, доливая воду из малого цилиндра до краёв: к отметке $V_0 = 50$ мл добавили $\Delta V = 30$ мл, значит до края 80 мл:

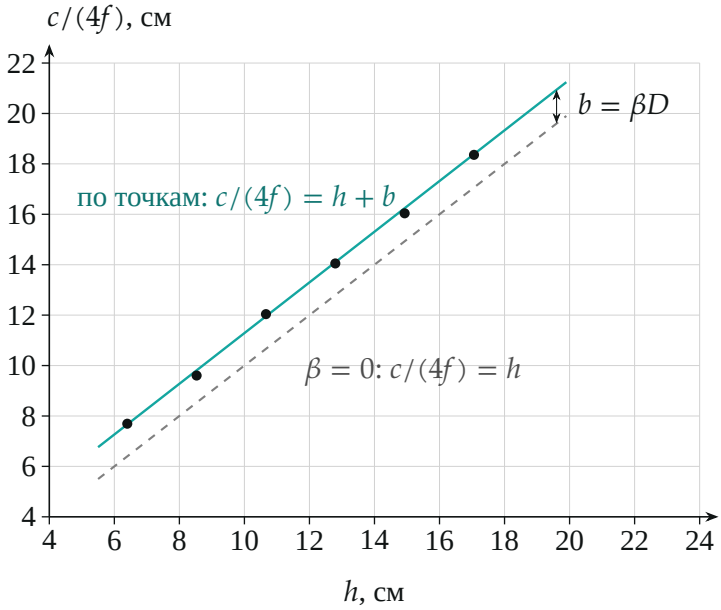
$$h_0 = \frac{V_0 + \Delta V}{S} = \frac{80}{4{,}69} = 17{,}1\ \text{см} \quad (\pm 0{,}3\ \text{см}).$$

Теория: $c/(4f) = h + \beta D$ — прямая единичного наклона, сдвинутая от

$c/(4f) = h$ на $b = \beta D$. Данные при $c = 340$ м/с:

V, мл	f, Гц	$c/(4f)$, см	h, см
0	463	18,4	17,1
10	530	16,0	14,9
20	605	14,0	12,8
30	706	12,0	10,7
40	885	9,6	8,5
50	1105	7,7	6,4

Пункт 5. График и β. Строим $c/(4f)$ от h.



Точки лежат на прямой единичного наклона, сдвинутой на $b = \beta D$ от штриховой прямой «без поправки». МНК: $c/(4f) = 1{,}00 \cdot h + 1{,}20$ см. Наклон ровно единица — но это не новая проверка: площадь S, по которой считали h, мы сами взяли из наклона тех же точек $c/(4f)$ от V, так что единичный наклон заложен построением. Независимы здесь только высота h_0 (доливом) и сдвиг прямой. Отрезок $b = 1{,}2$ см; с учётом

погрешности h_0 ($\pm 0{,}3$ см) $\Delta b \approx 0{,}3$ см:

$$\boxed{\beta = \frac{b}{D} = \frac{(1{,}2 \pm 0{,}3)\text{ см}}{2{,}44\text{ см}} = 0{,}5 \pm 0{,}1}$$

Теория даёт поправку на открытый конец около $0{,}3D$ (у трубы с широким фланцем — до $0{,}4D$); толстый край стенки цилиндра работает как небольшой фланец, поэтому $\beta \approx 0{,}5$ того же порядка.

Обратите внимание: строим именно $c/(4f)$ от h, а не f от h: в этих координатах теория даёт прямую с известным наклоном 1, и её отрезок на оси — прямо искомый βD.

Проверка. Размерность: $[k] = \text{с}/\text{м}^3$ ($[1/f] = \text{с}$, $[V] = \text{м}^3$); из $S = 4/(c|k|)$ получаем $\dfrac{1}{(\text{м}/\text{с})(\text{с}/\text{м}^3)} = \text{м}^2$. Предельные случаи: пустой цилиндр на 100 мл — $f = c/(4L_0) = 340/(4 \cdot 0{,}216) = 393$ Гц (измерено 391 Гц); при $V = 100$ мл $L = 21{,}6 - 13{,}5 = 8{,}1$ см, $f = 1048$ Гц (измерено 1036 Гц); цилиндр на 50 мл при $V = 50$ мл — $f = \dfrac{340}{4(0{,}064 + 0{,}012)} = 1118$ Гц (измерено 1105 Гц). Скорость звука двумя способами — 338 и 341 м/с (МНК по закрытой трубке 342 м/с), что соответствует комнатной температуре: $c = 331\sqrt{T/273} \approx 343$ м/с при 20°C.

Ответ. 1) $c_{\text{откр}} = 2L\overline{\Delta f} = (338 \pm 11)$ м/с; 2) $c_{\text{закр}} = (341 \pm 11)$ м/с, результаты согласуются; 3) $d = (31 \pm 1)$ мм, $L_0 = (21{,}6 \pm 1{,}1)$ см (эффективная длина столба; $H = L_0 - \beta d$); 4) $L_{\text{эфф}} = c/(4f)$, $h = h_0 - V/S$, $h_0 = 17{,}1$ см; 5) график $c/(4f)$ от h — прямая единичного наклона, $\beta = 0{,}5 \pm 0{,}1$.