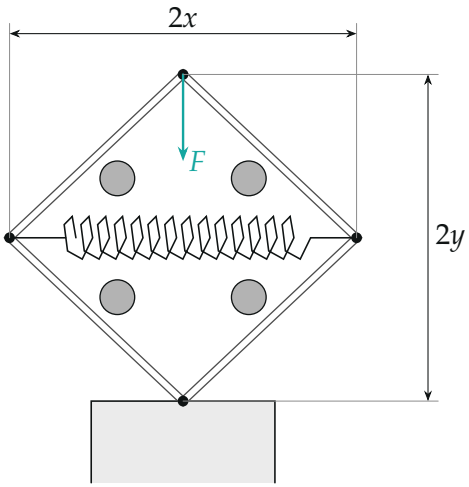
Бистабильная система

Задача 1. [ВсОШ 2022/23, 9 класс, практический тур, задача 1] Исследуйте механические свойства конструкции в виде ромба с пружиной. К середине каждой стороны ромба прикреплены грузы одинаковой массы. Считайте, что пружина подчиняется закону Гука. Массой пружины по сравнению с массой всей подвижной конструкции можно пренебречь. Используйте следующие обозначения:

- $2y$ — расстояние между верхним и нижним шарнирами конструкции;
- $2x$ — расстояние между левым и правым шарнирами конструкции;
- k — коэффициент жёсткости пружины;
- l_0 — расстояние между левым и правым шарнирами конструкции при ненапряжённой пружине;
- m — суммарная масса подвижных частей конструкции;
- F — вертикальная сила, которую нужно приложить к верхнему шарниру для обеспечения равновесия конструкции при заданном значении y.



В данной работе погрешности оценивать не нужно.

0. Запишите нечётный номер, указанный в нижней части направляющих конструкции.

1. Снимите с наибольшей точностью зависимость силы F от расстояния y во всём диапазоне возможных значений y. Для каждого измерения F и y укажите соответствующую величину x.
2. Постройте график полученной зависимости $F(y)$.
3. Получите теоретическую зависимость между F и x, y, l_0, m, k. Запишите эту зависимость в виде $F = \ldots$, где выражение справа от знака равенства содержит x, y, l_0, m, k. При выводе теоретической зависимости трением пренебречь.
4. Используя полученную зависимость $F(x, y, l_0, m, k)$, а также точки экспериментального графика $F(y)$, определите величину l_0.
5. Обозначьте $W = y\left(2 - \dfrac{l_0}{x}\right)$. Проверьте, является ли функция $F = F(W)$ линейной.
6. Постройте график зависимости $F(W)$. С помощью этого графика определите коэффициент жёсткости пружины k и массу конструкции m.

Оборудование: механическая система, закреплённая на столе; линейка; бутылка пластиковая 0,5 л массой 19 г; шприц 20 мл; стакан с водой 0,4 л; нитки; динамометр; миллиметровая бумага А4 для построения графиков; салфетки.

Примечание: разбирать механическую систему (отвинчивать гайки, снимать пружину) запрещено!

▲ **Решение. Что происходит.** Это экспериментальная задача на равновесие механизма. Ромб из четырёх шарнирно соединённых стержней стоит на нижнем шарнире; пружина стягивает левый и правый шарниры и стремится сплющить ромб по горизонтали, то есть поднять верхний шарнир; грузы и сила F давят его вниз. Связь F с размерами удобно получить из *равенства нулю суммарной работы* всех сил при малом смещении (принцип виртуальных перемещений): тогда силы реакции в шарнирах в расчёт не входят. Одной и той же силе F отвечают два положения равновесия — отсюда название «бистабильная». Данные ниже

— измерения организаторов.

Обозначения. $a = 190$ мм — сторона ромба (между шарнирами), $x^2 + y^2 = a^2$; индексы «в» и «н» — верхнее и нижнее положения равновесия при той же силе; $T = k(2x - l_0)$ — сила натяжения пружины.

Пункты 1–2.

1. Как измерять. Силу F создаём бутылкой на нитке, привязанной к верхнему шарниру: шприцом наливаем в неё воду, $F = (m_б + \rho V)g$, где $m_б = 19$ г. Так сила задаётся точнее и держится вертикально лучше, чем динамометром. Отрицательные F (вверх) — динамометром или нитью через опору. $2y$ меряем линейкой, $x = \sqrt{a^2 - y^2}$. При каждой силе ищем оба положения равновесия: верхнее (конструкция возвращается в него сама) и нижнее (в него приходится ставить рукой — оно неустойчиво).

2. Данные (у верхнего положения при $F \le 1{,}2$ Н ромб упирается в ограничитель направляющих, $y = 177$ мм):

F, Н	$y_в$, мм	$x_в$, мм	$y_н$, мм	$x_н$, мм	$W_н$, мм
−0,4	– – –	– – –	40	186	62
−0,2	– – –	– – –	45	185	70
0,0	177	69	50	183	77
0,2	177	69	53	182	82
0,5	177	69	61	180	94
0,7	177	69	68	177	104
1,0	177	69	75	175	114
1,2	177	69	80	172	121
1,5	176	72	87	169	131
1,7	175	74	98	163	146
2,0	175	74	101	161	150
2,2	174	76	108	156	159
2,5	171	83	118	149	170
2,7	168	89	125	143	177
2,9	165	94	135	134	186
3,0	160	102	140	128	190

График $F(y)$ — рис. 2: две ветви. Верхняя почти вертикальна у $y \approx 170$–

177 мм, нижняя — круто растущая кривая.

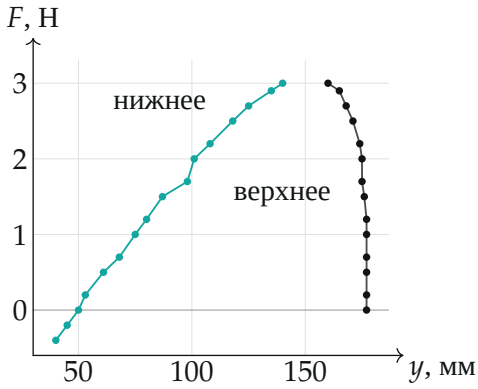


Рис. 2. Экспериментальная зависимость $F(y)$: верхнее (чёрные точки) и нижнее (бирюзовые) положения равновесия

Пункт 3.

3. Кинематика ромба. Нижний шарнир неподвижен. Пусть верхний шарнир опустился на $2\Delta y$ (полудиагональ y уменьшилась на Δy), тогда полудиагональ x выросла на Δx (рис. 3). Сторона не меняется: $(x+\Delta x)^2+(y-\Delta y)^2 = a^2 = x^2+y^2$; отбрасывая квадраты малых, $2x\Delta x - 2y\Delta y = 0$:

$$\Delta x = \frac{y}{x}\,\Delta y.$$

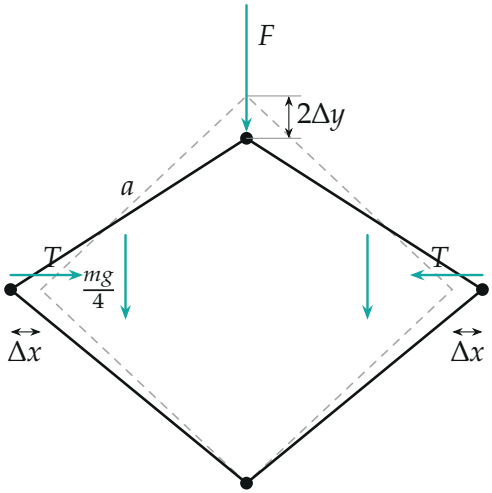


Рис. 3. Малое смещение (пунктир — исходный ромб): верх опускается на $2\Delta y$, боковые шарниры расходятся на Δx каждый; силы, совершающие работу: F, вес грузов, натяжение пружины

4. Равенство нулю работы. Работу совершают: сила F (верхний шарнир сместился вниз на $2\Delta y$) — $F \cdot 2\Delta y$; сила тяжести (середины сторон, а с ними и центр масс грузов, опустились на Δy) — $mg\Delta y$; пружина (её длина $2x$ выросла на $2\Delta x$, а тянет она внутрь) — $-k(2x - l_0) \cdot 2\Delta x$. Силы реакции идеальных шарниров и опоры работы не совершают. В равновесии сумма работ при малом смещении равна нулю:

$$2F\Delta y + mg\Delta y - 2k(2x - l_0)\frac{y}{x}\Delta y = 0 \quad \Rightarrow \quad F = k(2x - l_0)\frac{y}{x} - \frac{mg}{2}.$$

Пункт 4.

5. Определение l_0. Верхнее и нижнее положения при одной силе F дают одну и ту же правую часть; m и k сокращаются:

$$(2x_в - l_0)\frac{y_в}{x_в} = (2x_н - l_0)\frac{y_н}{x_н} \quad \Rightarrow \quad l_0 = \frac{2(y_в - y_н)}{\dfrac{y_в}{x_в} - \dfrac{y_н}{x_н}}.$$

Для $F = 2{,}2$ Н ($y_в = 174$, $x_в = 76$, $y_н = 108$, $x_н = 156$ мм): $l_0 = \dfrac{2 \cdot 66}{2{,}29 - 0{,}69}$ мм ≈ 83 мм. Пары при F от 1,5 до 3,0 Н (python) дают от

81 до 92 мм, в среднем 85 ± 3 мм; дальше берём $l_0 = 83$ мм. Самые надёжные пары — с заметно меньшим $y_в$: при $y_в \approx 176$ мм разность y/x мала, и ошибка в 1 мм сильно меняет результат.

Пункт 5.

6. Линеаризация. Перепишем формулу шага 4: $(2x - l_0)\dfrac{y}{x} = y\left(2 - \dfrac{l_0}{x}\right) = W$, поэтому

$$F = kW - \frac{mg}{2}$$

— теория предсказывает линейную функцию $F(W)$ с наклоном k и свободным членом $-mg/2$. Значения W для нижнего положения — в последнем столбце таблицы. На рис. 4 все 16 точек нижнего положения ложатся на прямую — функция линейна.

Пункт 6.

7. Наклон и свободный член. Метод наименьших квадратов (python) по точкам нижнего положения при $F \geq 0$:

$$F = \left(26{,}3\ \frac{\text{Н}}{\text{м}}\right) W - 2{,}00\ \text{Н}.$$

Отсюда $k \approx 26$ Н/м и $\dfrac{mg}{2} = 2{,}00$ Н, $m = \dfrac{2 \cdot 2{,}00}{9{,}8}$ кг $\approx 0{,}41$ кг.

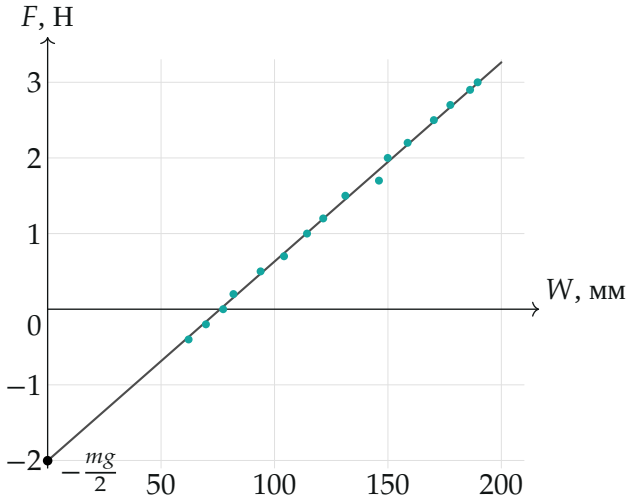


Рис. 4. Зависимость $F(W)$ для нижнего положения равновесия ($l_0 = 83$ мм) и прямая метода наименьших квадратов: наклон $k \approx 26$ Н/м, отрезок на оси F равен $-mg/2$

Обратите внимание. Точки верхнего положения для определения k и m не годятся: там W почти не меняется (141–190 мм), и ромб до $F \approx 1{,}5$ Н лежит на ограничителе — сила F не связана с y формулой равновесия. Нижнее положение неустойчиво (на рис. 2 сила растёт с y: стоит верху чуть подняться, и пружина толкает его дальше), поэтому ставить его надо аккуратно, придерживая нить.

Проверка. Размерности: kW — Н/м на м, сила; l_0/x безразмерно. Пары $(y_в, y_н)$ при разных F дают одно и то же l_0 в пределах нескольких миллиметров — модель согласована с опытом. По прямой при $F = 0$: $W_0 = mg/(2k) = 76$ мм, и точка $F = 0$ ($W = 77$ мм) на прямой. У организаторов $m = 390$ г (по графику на глаз); наш расчёт по наименьшим квадратам — 0,41 кг, отличие 5 % — в пределах точности отсчёта отрезка на графике.

Ответ. 1–2) таблица и график $F(y)$ с двумя ветвями (верхнее и нижнее положения); 3) $F = k(2x - l_0)\dfrac{y}{x} - \dfrac{mg}{2}$; 4) $l_0 \approx 83$ мм (по разным парам 85 ± 3 мм); 5) $F = kW - \dfrac{mg}{2}$ — линейная; 6) $k \approx 26$ Н/м, $m \approx 0{,}41$ кг.