Падение в бездну

Задача 1. [ВсОШ 2023/24, 10 класс, задача 1] «Падение в бездну».

Две противоположные стены глубокого ущелья представляют собой участки параллельных вертикальных плоскостей. Однажды в безветренный день экспериментатор Глюк и теоретик Баг расположились на краях различных стен ущелья (см. рис. 2). Линия, соединяющая Глюка и Бага, образует с горизонтом угол $\varphi = 30°$. Глюк и Баг бросали одинаковые шарики с одной и той же неизвестной начальной скоростью v_0 относительно Земли, причём такой, что ни один брошенный шарик не достиг противоположной стены. Траектории шариков всегда лежали в вертикальной плоскости, содержащей Глюка и Бага. На движущийся шарик действует сила сопротивления воздуха, направленная против скорости движения шарика и прямо пропорциональная ей. Размерами Глюка и Бага можно пренебречь.

После множества проведённых экспериментов Глюк и Баг выяснили следующее:

- если шарик был брошен горизонтально, то он удалялся по горизонтали на расстояние S от бросающего (см. рис. 1);
- при одновременных бросках Глюком и Багом шариков горизонтально и под углом $\alpha = 60°$ к горизонту соответственно (см. рис. 2) в установившемся режиме шарики движутся вдоль одной вертикальной прямой.

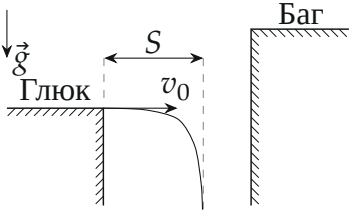


Рис. 1

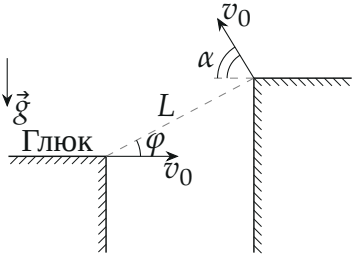


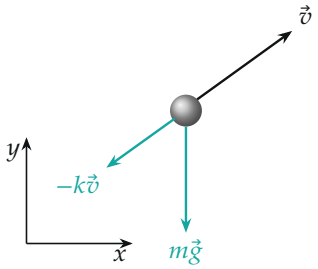
Рис. 2

Примечание: Приводить аналитические ответы, являющиеся функциями углов α и φ, не обязательно.

1. Определите расстояние L между Глюком и Багом (см. рис. 2).
2. Для одновременных бросков Глюком и Багом шариков горизонтально и под углом $\alpha = 60°$ к горизонту соответственно, как показано на рис. 2, определите расстояние S_∞ между шариками в установившемся режиме, а также минимальное расстояние S_{min} между шариками в процессе движения.

▲ **Решение. Что происходит.** Шарик летит под действием силы тяжести и вязкого сопротивления $-k\vec{v}$. Горизонтально на него действует только сопротивление, поэтому горизонтальная скорость гаснет, и шарик уходит по горизонтали на конечное расстояние, пропорциональное начальной горизонтальной скорости; потом он падает вертикально с установившейся скоростью. Главная идея второго пункта — перейти в систему отсчёта одного шарика: сила тяжести у обоих одинакова и в относительном движении пропадает, остаётся только «сопротивление» относительной скорости, и относительное движение прямолинейно. Класс задачи — вязкое трение: импульс силы $k\vec{v}\,dt = k\,d\vec{r}$.

Обозначения. m — масса шарика, $\beta = k/m$; ось x — горизонтально от Глюка к Багу, ось y — вверх; $\vec{v}_Г$, $\vec{v}_Б$ — скорости шариков Глюка и Бага; $\vec{v}_{отн} = \vec{v}_Г - \vec{v}_Б$; $l = L\cos\varphi$ — расстояние между стенами.



Силы, действующие на летящий шарик.

Пункт 1. Расстояние L.

1. Горизонтальный путь шарика. Второй закон Ньютона для шарика: $m\vec{a} = m\vec{g} - k\vec{v}$. В проекции на горизонтальную ось x сила тяжести

выпадает — поэтому и берём эту ось:

$$m\frac{dv_x}{dt} = -kv_x.$$

Рассмотрим маленький промежуток времени dt: $v_x\,dt = dx$ — горизонтальное смещение, поэтому $m\,dv_x = -k\,dx$. Просуммируем от броска до момента, когда горизонтальная скорость погасла (v_x от v_{0x} до 0):

$$-mv_{0x} = -k\,\Delta x \;\Rightarrow\; \Delta x = \frac{mv_{0x}}{k} = \frac{v_{0x}}{\beta}.$$

Горизонтальный путь пропорционален начальной горизонтальной скорости. Для горизонтального броска $v_{0x} = v_0$ и $\Delta x = S$, значит, $S = v_0/\beta$, а для броска под углом α — $\Delta x = S\cos\alpha$.

2. Шарики на одной вертикали. В установившемся режиме оба шарика движутся по одной вертикали, значит, сумма их горизонтальных путей — это расстояние между стенами (шарик Глюка уходит вправо на S, шарик Бага — влево на $S\cos\alpha$):

$$l = S + S\cos\alpha = \frac{3}{2}S, \qquad L = \frac{l}{\cos\varphi} = \frac{3S/2}{\sqrt{3}/2} = \sqrt{3}\,S.$$

Пункт 2. Расстояния между шариками.

1. Относительное движение. Вычтем вторые законы Ньютона для двух шариков (масса и k одинаковые):

$$m\vec{a}_\text{Г} = m\vec{g} - k\vec{v}_\text{Г}, \quad m\vec{a}_\text{Б} = m\vec{g} - k\vec{v}_\text{Б} \;\Rightarrow\; \vec{a}_\text{отн} = -\beta\,\vec{v}_\text{отн}.$$

Сила тяжести сократилась: в системе отсчёта шарика Бага шарик Глюка движется так, будто тяжести нет. Ускорение направлено против относительной скорости, значит, оно меняет только её модуль, но не направление: относительное движение — прямолинейное и замедляющееся, вдоль начальной относительной скорости.

2. Направление относительной скорости. В начальный момент

$\vec{v}_\text{Г} = (v_0;\, 0)$, $\vec{v}_\text{Б} = (-v_0 \cos\alpha;\; v_0 \sin\alpha)$:

$$\vec{v}_\text{отн} = (v_0(1 + \cos\alpha);\; -v_0 \sin\alpha).$$

Угол с горизонтом: $\operatorname{tg}\theta = \sin\alpha/(1+\cos\alpha) = \operatorname{tg}(\alpha/2)$, то есть $\theta = \alpha/2 = 30°$ вниз. Это видно и без счёта: сумма двух векторов одной длины v_0 — диагональ ромба, она делит угол между ними пополам.

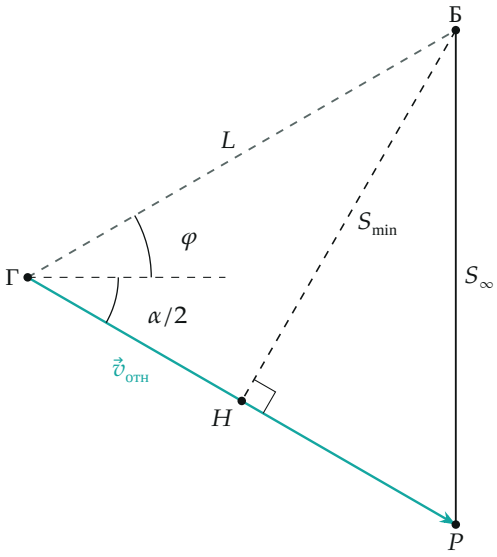
3. Треугольник. Шарик Глюка относительно шарика Бага идёт по прямой из точки Г под углом 30° вниз и останавливается в точке P на одной вертикали с Б (так сказано в условии про установившийся режим). Углы треугольника Г–Б–P: при вершине Г — $\varphi + \alpha/2 = 60°$, при вершине Б между ГБ и вертикалью — $90° - \varphi = 60°$. Треугольник равносторонний:

$$S_\infty = |\text{Б}P| = L = \sqrt{3}\,S.$$

Минимальное расстояние — от Б до прямой относительного движения, то есть высота БH треугольника (в точке H относительная скорость перпендикулярна линии, соединяющей шарики):

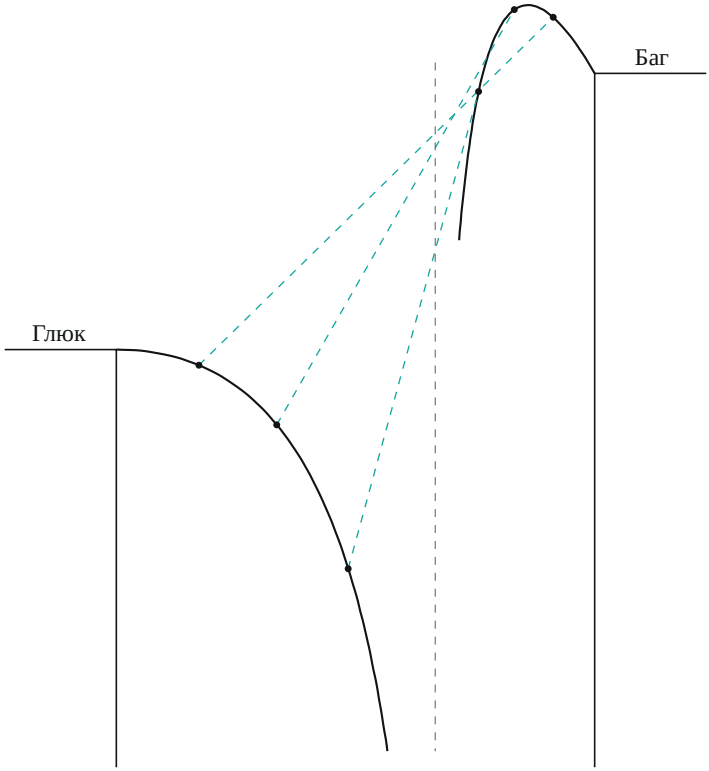
$$S_\text{min} = L\sin 60° = \sqrt{3}\,S \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}\,S.$$

Шарик Глюка проходит точку H по пути к P, потому что H — середина стороны ГP.



Движение шарика Глюка в системе отсчёта шарика Бага: прямая ГР под углом $\alpha/2$ к горизонту. Треугольник Г–Б–Р равносторонний, S_{min} — его высота.

Обратите внимание: прямолинейно только относительное движение. В системе отсчёта Земли траектории — кривые (рисунок ниже), и искать минимум расстояния по ним намного труднее.



Траектории шариков в системе отсчёта Земли (пример: $g/\beta^2 = 1{,}2\,S$). Пунктир — отрезки между шариками в одни и те же моменты: все они параллельны прямой ГР с предыдущего рисунка, длина сначала убывает, потом растёт до S_∞. В конце оба шарика на одной вертикали.

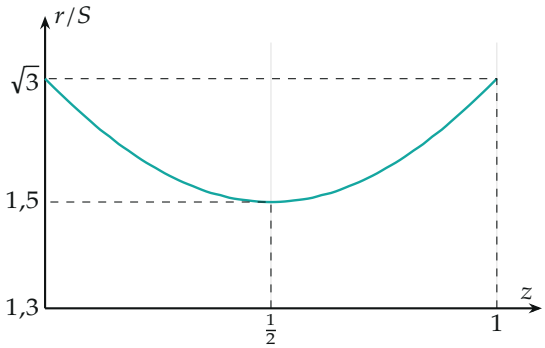
4. Второй способ — закон движения. Из уравнения для v_x получаем $v_x = v_{0x}e^{-\beta t}$ и $\Delta x = \frac{v_{0x}}{\beta}(1 - e^{-\beta t})$; для y к тому же добавляется общая для обоих шариков «тяжёлая» часть, которая в разности сокращается. Поэтому с $z = 1 - e^{-\beta t}$ (от 0 до 1)

$$\Delta x_{\text{отн}} = l - \tfrac{3}{2}Sz, \qquad \Delta y_{\text{отн}} = L\sin\varphi + S\sin\alpha\, z = \tfrac{\sqrt{3}}{2}S(1+z),$$

$$r^2 = S^2\Big[\tfrac{9}{4}(1-z)^2 + \tfrac{3}{4}(1+z)^2\Big] = 3S^2\,(1 - z + z^2).$$

Минимум параболы — при $z = \frac{1}{2}$: $r_{\min} = S\sqrt{3\cdot\frac{3}{4}} = \frac{3}{2}S$; при $z \to 1$

$(t \to \infty)\ r \to \sqrt{3}\,S$ — то же самое.



Расстояние между шариками как функция $z = 1 - e^{-\beta t}$: из $\sqrt{3}S$ через минимум $1{,}5S$ при $z = \frac{1}{2}$ обратно в $\sqrt{3}S$.

Проверка. Размерность: все ответы — длина S с числовым множителем. Вначале расстояние между шариками равно $L = \sqrt{3}S$ и в конце тоже — это и есть равносторонний треугольник; минимум $\frac{3}{2}S$ меньше $\sqrt{3}S \approx 1{,}73S$. Предел: без сопротивления ($\beta \to 0$) $S \to \infty$ — шарики долетели бы до стены, что условие исключает.

Ответ. 1) $L = \sqrt{3}\,S$; 2) $S_\infty = \sqrt{3}\,S$, $S_{\min} = \frac{3}{2}\,S$.