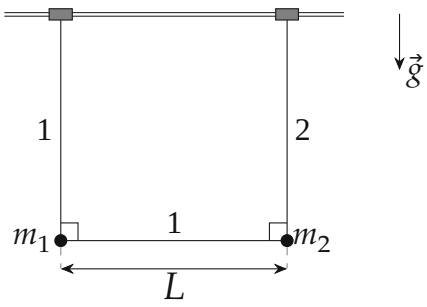
Столкновение на спице

Задача 2. [ВсОШ 2023/24, 10 класс, задача 2] «Столкновение на спице».



Два одинаковых маленьких невесомых коротких цилиндра могут без трения скользить по длинной закреплённой горизонтальной спице. Цилиндры соединены с невесомыми нерастяжимыми нитями 1 и 2, причём длина нити 1 на величину L больше длины нити 2 (см. рис). По нити 1 без трения может перемещаться маленькая бусинка массой m_1, а небольшой груз массой m_2 прикреплён к концам обеих нитей. Изначально систему, состоящую из цилиндров, нитей, бусинки и груза удерживают в состоянии покоя таким образом, что спица и обе нити находятся в одной вертикальной плоскости, бусинка и груз расположены на одной горизонтали, при этом бусинка расположена на одной вертикали с цилиндром, прикреплённым к нити 1, а груз расположен на одной вертикали с цилиндром, прикреплённым к нити 2. Нити слегка натянуты. Ускорение свободного падения равно g. Считайте, что размеры цилиндров больше размеров бусинки и груза. Сопротивлением воздуха можно пренебречь. Систему отпускают.

1. Определите скорости v_1 и v_2 бусинки и груза соответственно прямо перед столкновением цилиндров.
2. Определите силы натяжения T_1 и T_2 нитей 1 и 2 соответственно прямо перед столкновением цилиндров.

▲ **Решение. Что происходит.** Бусинка соскальзывает по нити 1 вниз и тянет груз к себе, цилиндры съезжаются. Главная идея — невесомые

цилиндры: сумма сил на невесомое тело равна нулю, иначе у него было бы бесконечное ускорение. Спица гладкая и действует только вертикально, значит, нити у цилиндров всё время вертикальны. Поэтому груз движется только горизонтально, а столкновение — момент, когда всё на одной вертикали. Скорости — из законов сохранения (горизонтальный импульс и энергия), натяжения — из второго закона Ньютона, для которого нужно ускорение бусинки, то есть кривизна её траектории.

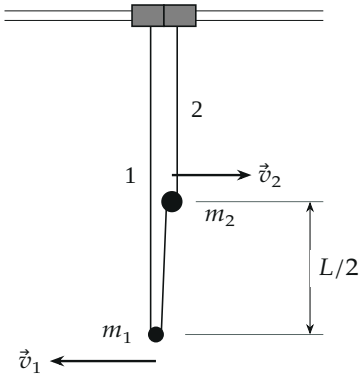
Обозначения. h — длина нити 2 (глубина груза под спицей, она не меняется); $v_{\text{отн}}$ — скорость бусинки относительно груза перед столкновением; a_1 — проекция ускорения бусинки на вертикаль вверх в этот момент; ρ — радиус кривизны траектории бусинки относительно груза.

Пункт 1. Скорости.

1. Конечное положение. Нить 2 вертикальна и нерастяжима, поэтому груз всё время на глубине h и движется горизонтально. Длина нити 1 равна $h + L$; перед столкновением от цилиндра до бусинки — вертикальный участок d, от бусинки обратно вверх до груза — $d - h$:

$$d + (d - h) = h + L \;\Rightarrow\; d - h = \frac{L}{2}.$$

Бусинка оказывается на $L/2$ ниже груза: за время движения она опустилась на $L/2$. В этот момент скорость груза горизонтальна (он движется только по горизонтали), а скорость бусинки — тоже горизонтальна: она в нижней точке своей траектории.



Перед столкновением цилиндров: всё на одной вертикали, бусинка на $L/2$ ниже груза, скорости горизонтальны и противоположны.

2. Горизонтальный импульс. На систему «бусинка + груз + нити + цилиндры» внешние силы — тяжесть и реакция спицы — вертикальны. Поэтому горизонтальная проекция импульса сохраняется и равна нулю (вначале всё покоилось). Цилиндры невесомы, импульса не несут:

$$m_1 v_1 = m_2 v_2, \qquad v_1 + v_2 = v_{\text{отн}},$$

$$v_1 = \frac{m_2 v_{\text{отн}}}{m_1 + m_2}, \quad v_2 = \frac{m_1 v_{\text{отн}}}{m_1 + m_2}.$$

3. Энергия. Трения нет, нити нерастяжимы, поэтому механическая энергия сохраняется. Груз не опускается, бусинка опустилась на $L/2$:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 m_2 v_{\text{отн}}^2}{2(m_1 + m_2)} = m_1 g \frac{L}{2},$$

$$v_{\text{отн}}^2 = gL\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right).$$

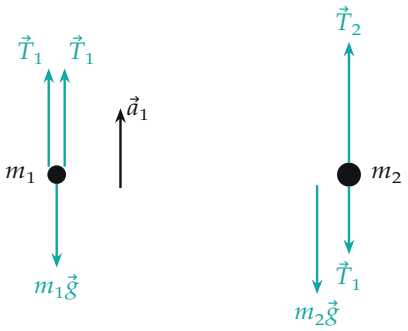
Отсюда

$$v_1 = \sqrt{\frac{gL}{1 + m_1/m_2}}, \qquad v_2 = \frac{m_1}{m_2}\sqrt{\frac{gL}{1 + m_1/m_2}}.$$

Пункт 2. Натяжения.

1. Второй закон Ньютона. Перед столкновением все нити вертикальны, все силы вертикальны. На бусинку тянут вверх оба участка нити 1 (по нити без трения натяжение одно, T_1), вниз — тяжесть. На груз: T_2 вверх, T_1 вниз (участок нити 1 к бусинке), тяжесть вниз; вертикального ускорения у груза нет:

$$2T_1 - m_1 g = m_1 a_1, \qquad T_2 = T_1 + m_2 g.$$



Силы на бусинку (слева) и груз (справа) перед столкновением. У груза ускорение нулевое: горизонтальная сила на него в этот момент равна нулю. Неизвестным осталось только a_1.

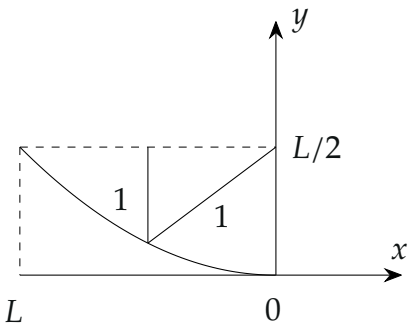
2. Переход в систему отсчёта груза. Горизонтальные силы на груз в этот момент отсутствуют (все нити вертикальны), а вертикального ускорения у него нет никогда, значит, ускорение груза равно нулю, и ускорение бусинки в его системе отсчёта то же, a_1. Относительная скорость бусинки горизонтальна, поэтому ускорение — центростремительное:

$$a_1 = \frac{v_{\text{отн}}^2}{\rho}.$$

3. Траектория бусинки относительно груза. Поместим начало в нижнюю точку относительной траектории, ось y — вверх, груз в точке $(0;\ L/2)$. В произвольный момент бусинка в точке $(x;\ y)$: вертикальный участок нити 1 от спицы до бусинки равен $h + L/2 - y$ (груз всегда на глубине h), участок бусинка–груз равен $\sqrt{(L/2-y)^2 + x^2}$. Постоянство длины нити 1, равной $h + L$ (слагаемое h сокращается):

$$L = \left(\frac{L}{2} - y\right) + \sqrt{\left(\frac{L}{2} - y\right)^2 + x^2} \;\Rightarrow\; y = \frac{x^2}{2L}.$$

Траектория — парабола с фокусом в грузе (это и есть «оптическое свойство»: путь до прямой плюс путь до фокуса постоянен).



Траектория бусинки в системе отсчёта груза — парабола $y = x^2/(2L)$: бусинка стартует из точки $(L;\ L/2)$, груз — в фокусе $(0;\ L/2)$.

4. Радиус кривизны в вершине. Сравним с броском горизонтально: $x = ut$, $y = gt^2/2$, то есть $y = gx^2/(2u^2)$, а в вершине $u^2/\rho = g$, $\rho = u^2/g$. У параболы $y = x^2/(2p)$ получаем $\rho = p$. У нас $p = L$:

$$\rho = L, \qquad a_1 = \frac{v_{\text{отн}}^2}{L} = g\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right).$$

Второй способ: по формуле $\rho = (1 + y'^2)^{3/2}/|y''|$ при $y' = 0$, $y'' = 1/L$ — тоже $\rho = L$.

Обратите внимание: радиус кривизны берём в системе отсчёта груза только потому, что ускорение груза в этот момент равно нулю. В лабораторной системе траектория бусинки — другая парабола ($x_г = -m_1 x_б/m_2$ из неподвижности центра масс по горизонтали), её $\rho_1 = L/(1 + m_1/m_2)^2$ со скоростью v_1 даёт то же $a_1 = v_1^2/\rho_1$.

5. Ответ для натяжений.

$$T_1 = \frac{m_1(g + a_1)}{2} = m_1 g\left(1 + \frac{m_1}{2m_2}\right),$$

$$T_2 = T_1 + m_2 g = \left(m_1 + m_2 + \frac{m_1^2}{2m_2}\right) g.$$

Проверка. Размерность: $\sqrt{gL}$ — скорость, mg — сила. Предел $m_2 \to \infty$ (груз неподвижен): $v_2 \to 0$, $v_1 \to \sqrt{gL}$ — бусинка опустилась на $L/2$, $v^2 = 2g \cdot L/2$; $T_1 \to m_1 g$: $2T_1 = m_1(g + g)$ — бусинка движется по

параболе с $\rho = L$ и $v^2 = gL$, центростремительное ускорение g. Второй способ для a_1 в лабораторной системе дал то же. Знак: $T_2 > (m_1 + m_2)g$ — бусинка в нижней точке «давит» сильнее своего веса.

Ответ. 1) $v_1 = \sqrt{\dfrac{gL}{1 + m_1/m_2}}$, $v_2 = \dfrac{m_1}{m_2}\sqrt{\dfrac{gL}{1 + m_1/m_2}}$; 2) $T_1 = m_1 g\left(1 + \dfrac{m_1}{2m_2}\right)$, $T_2 = \left(m_1 + m_2 + \dfrac{m_1^2}{2m_2}\right)g$.