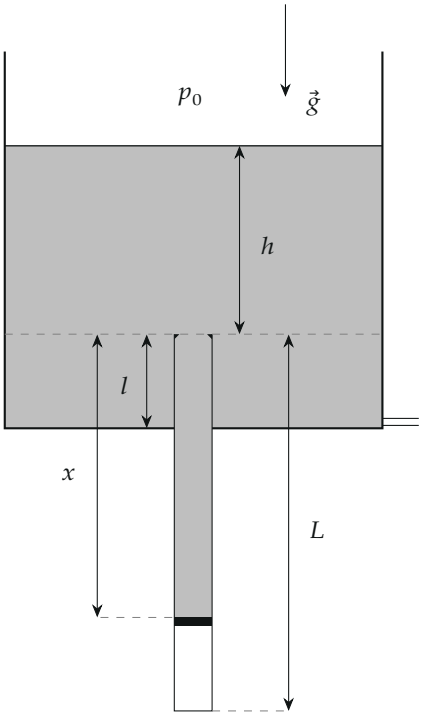
Из архива ЦПМК

Задача 3. [ВсОШ 2023/24, 10 класс, задача 3] «Из архива ЦПМК».

В архиве ЦПМК 2011 года была обнаружена задача, в которой описывалось довольно странное устройство для экспериментов с идеальным газом.



Закрытая снизу тонкостенная цилиндрическая трубка длиной L, установленная вертикально, жёстко соединена с закреплённым цилиндрическим сосудом, ось которого также вертикальна, а диаметр во много раз превышает диаметр трубки (см. рис.). Верхняя часть трубки расположена на расстоянии l выше дна сосуда. В трубке без трения может перемещаться тонкий лёгкий герметичный поршень. Под поршнем находится воздух, который можно считать идеальным газом. В верхней части трубки расположены небольшие упоры, ограничивающие движение поршня вверх.

В стенке сосуда вблизи его дна проделано небольшое отверстие. С помощью тонкой трубочки через отверстие сосуд очень медленно наполняют ртутью, а затем так же медленно понижают уровень ртути в сосуде до его дна.

Далее везде h обозначает уровень ртути в сосуде относительно верхней части трубки, а x — расстояние между поршнем и упорами. Считайте, что в процессе изменения уровня ртути в сосуде температура воздуха под поршнем и атмосферное давление остаются постоянными.

Параметры установки: $L = 3{,}04$ м, $l = 0{,}04$ м, атмосферное давление p_0 равно гидростатическому давлению столба ртути высотой $h_0 = p_0/\rho g = 0{,}76$ м, где ρ — плотность ртути, а g — ускорение свободного падения. Величины p_0, ρ и g считайте неизвестными.

Во всех пунктах задачи приведите как аналитические выражения, так и численные значения для ответов.

Изначально ртути в сосуде и над поршнем нет, а давление воздуха под поршнем превышает величину атмосферного давления. В пунктах 1–3 считайте, что когда уровень ртути в сосуде достиг максимального значения $h_{max} = 1{,}52$ м, расстояние между поршнем и упорами составило $x_{max} = 2{,}28$ м.

1. Рассмотрим процесс повышения уровня ртути в сосуде. При каком значении уровня h_1 ртути в сосуде поршень пришёл в движение?
2. Пусть уровень ртути в сосуде в процессе его повышения составил $h_1 + \Delta h$, где $0 < \Delta h \ll h_1$. Найдите возможные значения x_1 между поршнем и упорами.
3. На каком расстоянии x_2 до упоров будет находиться поршень, когда уровень ртути в сосуде понизится до его дна? Ответ обоснуйте.
4. Ртуть полностью откачали из сосуда и пространства над поршнем, после чего изменили количество воздуха под поршнем. Далее процессы повышения и понижения уровня в сосуде с помощью трубочки через отверстие повторили. Оказалось, что когда уровень ртути в сосуде достиг величины $h_{max} = 1{,}52$ м, расстояние между поршнем и упорами составило $x'_{max} = 1{,}52$ м. При каком значе-

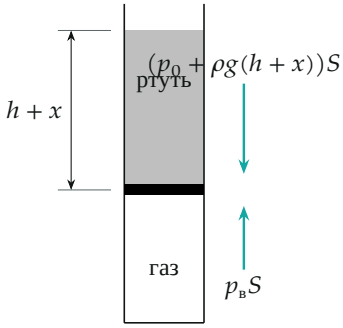
нии уровня h_2 ртути в сосуде в процессе его понижения поршень достигает упоров?

▲ **Решение. Что происходит.** Ртуть из сосуда переливается в трубку над поршнем, столб над ним равен $h + x$. Поршень лёгкий, поэтому в равновесии давление газа под ним равно давлению сверху. Газ сжимается изотермически: давление растёт как $1/(L - x)$, а давление ртути — линейно по x. Равновесий бывает два, одно устойчивое, другое нет; поршень «срывается», когда они сливаются. Класс задачи — равновесие и его устойчивость: сравниваем, как быстро с ростом x растут давление газа и давление ртути.

Обозначения. Все давления — в метрах ртутного столба ($p/\rho g$), тогда $p_0 \to h_0$. S — сечение трубки; $p_\text{в}$ — давление газа; $C = p_\text{в}(L - x)$ — постоянная закона Бойля–Мариотта (в м^2); $x_\text{кр}$ — граница устойчивости.

1. Условие равновесия поршня. Поршень лёгкий, поэтому второй закон Ньютона для него сводится к равенству сил давления сверху и снизу (вне упоров):

$$p_\text{в} = h_0 + h + x.$$



Силы давления на поршень: сверху атмосфера и столб ртути высотой $h + x$, снизу газ. Газ: масса и температура постоянны, по закону Бойля–Мариотта $p_\text{в}\, S(L - x) = \text{const}$, то есть $p_\text{в} = C/(L - x)$. Равновесие:

$$(h_0 + h + x)(L - x) = C.$$

Это квадратное уравнение относительно x:

$$x^2 - (L - h_0 - h)\,x + (C - (h_0 + h)L) = 0.$$

Пункт 1. Начало движения. Пока поршень прижат к упорам ($x = 0$), газ занимает всю трубку и его давление C/L постоянно. Поршень отходит, когда давление ртути сравняется с ним: $h_0 + h_1 = C/L$. Постоянную C знаем из состояния при $h_{\max}$:

$$C = (h_0 + h_{\max} + x_{\max})(L - x_{\max}) = 3{,}466\ \text{м}^2,$$

$$h_1 = \frac{(h_0 + h_{\max} + x_{\max})(L - x_{\max})}{L} - h_0 = 1{,}14 - 0{,}76 = 0{,}38\ \text{м} = 380\ \text{мм}.$$

Пункт 2. Сразу после начала движения. Подставим $C = (h_0 + h_1)L$, уравнение равновесия принимает вид

$$x^2 - (L - h_0 - h)\,x + (h_1 - h)L = 0.$$

При $h = h_1 + \Delta h$ свободный член $-\Delta h\,L < 0$: по теореме Виета произведение корней отрицательно, корни разных знаков. Отрицательный корень ($x \approx -\Delta h L/(L - h_0 - h_1)$, то есть поршень выше упоров) невозможен. Остаётся единственный корень, при $\Delta h \to 0$

$$x_1 = L - h_0 - h_1 = 3{,}04 - 0{,}76 - 0{,}38 = 1{,}90\ \text{м}.$$

Значит, поршень не сдвигается плавно, а скачком уходит от упоров на 1,9 м: положение $x = 0$ при $h = h_1$ неустойчиво (см. ниже).

Пункт 3. Уровень опустили до дна.

1. Что происходит при $h < 0$. Когда уровень ртути в сосуде опускается ниже верхнего края трубки (дно сосуда на l ниже), ртуть в трубке остаётся и отделяется от сосуда: столб над поршнем равен x, и уравнение равновесия — то же, что при $h = 0$. Поэтому достаточно найти положение при $h = 0$.

2. Корни при $h = 0$.

$$x^2 - (L - h_0)\,x + h_1 L = 0, \qquad x^2 - 2{,}28x + 1{,}155 = 0,$$

$$x = \frac{2{,}28 \pm 0{,}76}{2} = 0{,}76 \text{ м или } 1{,}52 \text{ м}.$$

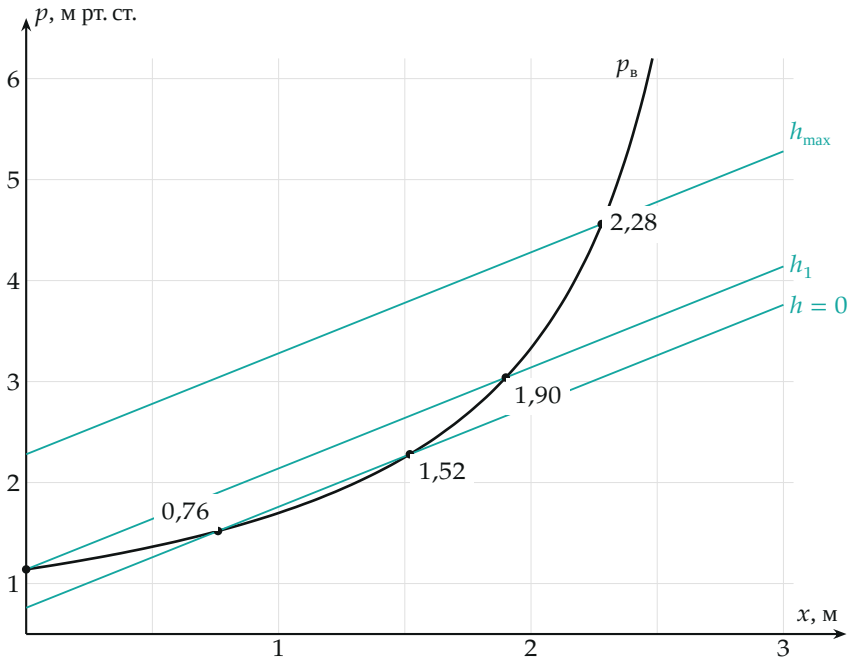
3. Устойчивость. Сдвинем поршень вниз на малое Δx. Равновесие устойчиво, если давление газа при этом вырастет сильнее, чем давление ртути (тогда поршень вытолкнет обратно):

$$\frac{dp_{\text{в}}}{dx} = \frac{C}{(L-x)^2} > \frac{d(h_0 + h + x)}{dx} = 1 \;\Rightarrow\; x > x_{\text{кр}} = L - \sqrt{C}.$$

Здесь $x_{\text{кр}} = 3{,}04 - \sqrt{3{,}466} = 1{,}18$ м. Положение 0,76 м неустойчиво, 1,52 м — устойчиво. При $h = h_1$ и $x = 0$ условие тоже нарушено ($0 < 1{,}18$) — отсюда скачок в пункте 2.

4. Поршень всё время в устойчивом положении. При понижении уровня от $h_{\max}$ поршень идёт из $x_{\max} = 2{,}28$ м по устойчивой ветви: x уменьшается вместе с h, оставаясь больше $x_{\text{кр}}$ (при $h = 0$ это $1{,}52 > 1{,}18$). Значит, срыва нет и

$$x_2 = \frac{L - h_0 + \sqrt{(L+h_0)^2 - 4(h_0 + h_{\max} + x_{\max})(L - x_{\max})}}{2} = 1{,}52 \text{ м}.$$



Пункты 1–3: давление газа $p_в = C/(L-x)$ (чёрная кривая) и давление ртути $h_0 + h + x$ (бирюзовые прямые) при $h = 0, h_1, h_{\max}$. Пересечения — равновесия; устойчиво то, где кривая круче прямой.

Пункт 4. Срыв к упорам.

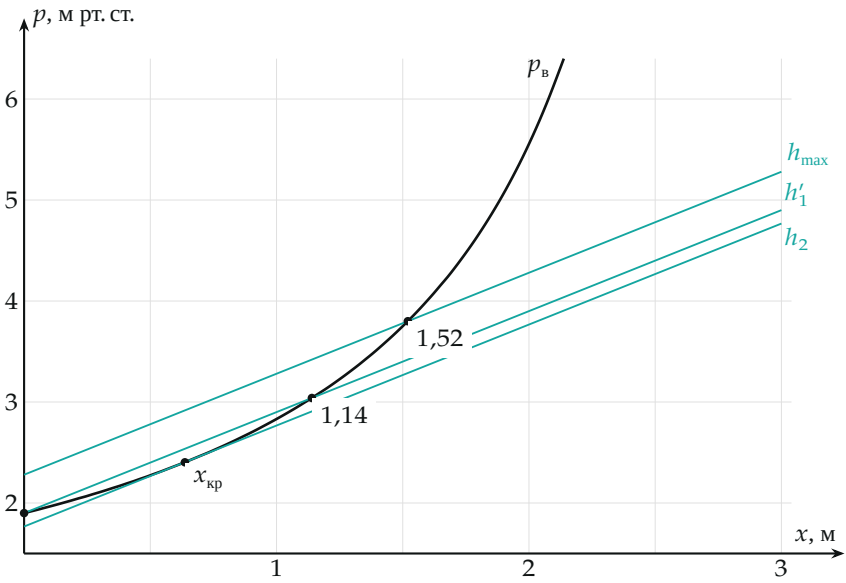
1. Новая постоянная. $C' = (h_0 + h_{\max} + x'_{\max})(L - x'_{\max}) = 3{,}80 \cdot 1{,}52 = 5{,}776$ м^2. Поршень отходит от упоров при $h'_1 = C'/L - h_0 = 1{,}14$ м, сразу на $x = L - h_0 - h'_1 = 1{,}14$ м — это больше $x'_{кр} = L - \sqrt{C'} = 0{,}637$ м, то есть устойчиво. Дальше поршень доходит до 1,52 м при $h_{\max}$.

2. Понижение уровня. Обратно поршень идёт по устойчивой ветви, и при $h = h'_1$ он не у упоров, а на 1,14 м. Ниже h'_1 корней два, устойчивый и неустойчивый, они сближаются. Когда они сливаются (прямая касается кривой) в точке $x'_{кр}$, устойчивость теряется, и поршень скачком уходит к упорам: при любом другом x давление газа больше давления ртути.

3. Касание. Двойной корень: по теореме Виета сумма корней $2x'_{кр} = L - h_0 - h_2$:

$$h_2 = L - h_0 - 2\left(L - \sqrt{C'}\right),$$

$$h_2 = 2\sqrt{(h_0 + h_{\max} + x'_{\max})(L - x'_{\max})} - (L + h_0) \approx 1{,}007 \text{ м}.$$



Пункт 4: при $h = h_2$ прямая давления ртути касается кривой давления газа в точке $x'_{кр}$ — два равновесия слились, ниже поршень прыгает к упорам.

Обратите внимание: поршень в пункте 4 срывается при $h_2 \approx 1{,}007$ м, то есть *ниже* уровня $h'_1 = 1{,}14$ м, при котором он оторвался от упоров: процесс с гистерезисом.

Проверка. Размерность: все формулы — длины (давления в метрах ртутного столба). Числа: при h_2 касание в $x = 0{,}637$ м, проверим равновесие: $(0{,}76 + 1{,}007 + 0{,}637)(3{,}04 - 0{,}637) = 2{,}404 \cdot 2{,}403 = 5{,}776 = C'$ — сходится. В пункте 3 подстановка: $(0{,}76 + 1{,}52) \cdot 1{,}52 = 3{,}466 = C$.

Ответ. 1) $h_1 = \dfrac{(h_0 + h_{\max} + x_{\max})(L - x_{\max})}{L} - h_0 = 380$ мм; 2) $x_1 = L - h_0 - h_1 = 1900$ мм (единственное значение); 3) $x_2 = \dfrac{L - h_0 + \sqrt{(L + h_0)^2 - 4(h_0 + h_{\max} + x_{\max})(L - x_{\max})}}{2} = 1520$ мм; 4) $h_2 = 2\sqrt{(h_0 + h_{\max} + x'_{\max})(L - x'_{\max})} - (L + h_0) \approx 1007$ мм.