Полёты стержня

Задача 4. [ВсОШ 2023/24, 10 класс, задача 4] «Полёты стержня».

В распоряжении экспериментатора Глюка были закреплённая равномерно заряженная по поверхности зарядом Q непроводящая сфера радиусом R и **очень длинный** тонкий прямолинейный непроводящий стержень массой m, заряженный равномерно по длине с линейной плотностью заряда λ. Известно, что заряды стержня и сферы были одноимёнными.

В первой серии экспериментов Глюк помещал стержень на поверхность сферы таким образом, что стержень касался поверхности сферы своей серединой.

Сначала Глюк отпустил стержень из состояния покоя, и когда расстояние между центрами сферы и стержня достигло неизвестной величины $l > R$, стержень двигался со скоростью $u_0 = \sqrt{Q\lambda/(2\pi\varepsilon_0 m)}$ (см. рис. 1).

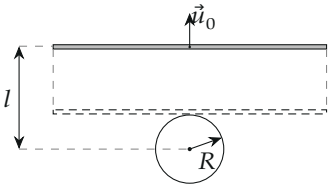


Рис. 1

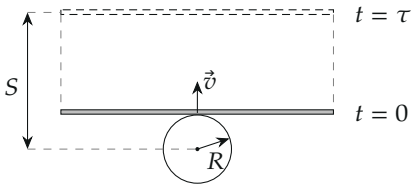


Рис. 2

Затем Глюк стал приводить стержень в движение так, что он начинал поступательное движение с различными значениями начальной скорости v в направлении, перпендикулярном стержню и лежащем в плоскости, содержащей стержень и центр сферы. Глюк получил зависимость от начальной скорости v стержня времени τ, прошедшего от момента старта, через которое расстояние между центрами сферы и стержня достигало неизвестной величины $S > R$ (см. рис. 2). График полученной зависимости приведён ниже на рис. 3 в координатах $y(x)$, где $y = \tau/\tau_0$, $x = v/v_0$, а величины τ_0 и v_0 определяются выражениями:

$$\tau_0 = R\sqrt{\frac{4\pi\varepsilon_0 m}{Q\lambda}}, \qquad v_0 = \sqrt{\frac{Q\lambda}{4\pi\varepsilon_0 m}}.$$



Рис. 3

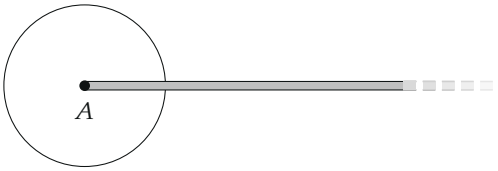


Рис. 4

Для второго эксперимента Глюк проделал в поверхности сферы небольшое отверстие, поместил конец A стержня внутрь сферы таким образом, что он оказался в центре сферы (см. рис. 4) и отпустил стержень без начальной скорости. Трения между стержнем и отверстием нет.

Во всех экспериментах стержни двигались поступательно. Силой сопротивления воздуха и гравитацией можно пренебречь. Величины S и l во много раз меньше длины стержня.

Для второго эксперимента определите:

1. время T_1, прошедшее от момента старта, через которое конец A стержня оказался на поверхности сферы, а также скорость стержня V_1 в этот момент времени;
2. скорость V_2 стержня в момент, когда его конец A находился на расстоянии l от центра сферы;

3. время T, прошедшее от момента старта, через которое конец A стержня оказался на расстоянии S от центра сферы.

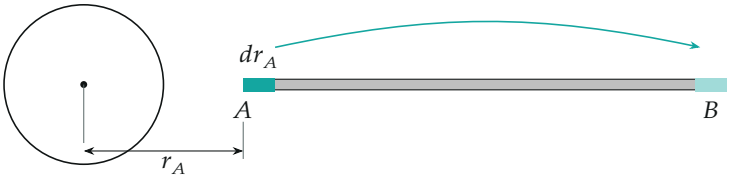
▲ **Решение. Что происходит.** В обоих опытах стержень отталкивается от сферы, но силы разные: в первом опыте сфера действует на бесконечный в обе стороны стержень, во втором — на полубесконечный, торчащий из центра. Главная идея: во втором опыте сила вдвое меньше силы первого опыта при том же расстоянии (снаружи сферы), поэтому движения подобны — и график первого опыта годится для второго после пересчёта масштабов. Внутри сферы сила постоянна — равноускоренное движение.

Обозначения. r_C — расстояние от центра сферы до стержня в первом опыте, r_A — до конца A во втором; $F_1(r_C)$ и $F_2(r_A)$ — силы отталкивания; W_1, W_2 — энергии взаимодействия; $F_0 = \dfrac{Q\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}$; $v_0^2 = \dfrac{Q\lambda}{4\pi\varepsilon_0 m}$ (тогда $u_0^2 = 2v_0^2$).

1. Сила во втором опыте. Поле равномерно заряженной сферы внутри равно нулю, снаружи — как у точечного заряда Q в центре. Стержень лежит вдоль радиуса, поэтому на его элемент dr действует сила $\lambda E(r)\,dr$ вдоль стержня. Сложим силы от конца A до бесконечности (стержень очень длинный):

$$F_2 = \int_{r_A}^{\infty} \lambda E\,dr = \lambda\varphi(r_A), \qquad F_2 = \begin{cases} \dfrac{Q\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R} = F_0, & r_A \le R, \\ \dfrac{Q\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r_A}, & r_A > R. \end{cases}$$

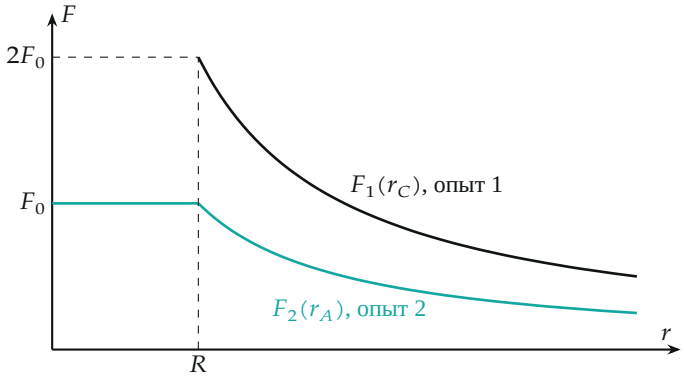
Внутри сферы поля нет, и интеграл начинается с R — сила постоянна. Второй способ получить $F_2 = \lambda\varphi_A$ — энергетический: при сдвиге стержня на dr_A картина та же, что если бы кусочек dr_A перенесли с конца A на далёкий конец B, где потенциал нулевой; энергия меняется на $-\lambda\varphi_A\,dr_A$, и $F_2 = -dW_2/dr_A = \lambda\varphi_A$.



При сдвиге поступательно движущегося стержня на dr_A всё равно, какие кусочки куда сдвинулись: результат — кусочек dr_A «пропал» у конца A и «появился» у далёкого конца B.

2. Сила в первом опыте. Поле бесконечного стержня по теореме Гаусса $E = \lambda/(2\pi\varepsilon_0 r)$; по третьему закону Ньютона сила на стержень равна силе на заряд Q в центре сферы (сфера действует как точечный заряд, а внешнее поле стержня на сферу — как на точку):

$$F_1(r_C) = \frac{Q\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r_C} = 2F_2(r) \quad \text{при } r_C = r_A = r > R.$$



Силы отталкивания в двух опытах: снаружи сферы сила первого опыта ровно вдвое больше; во втором опыте внутри сферы сила постоянна.

Пункт 1. Внутри сферы. Сила постоянна, по второму закону Ньютона ускорение $a = F_0/m = v_0^2/R$; стержень стартует из покоя и проходит путь R:

$$T_1 = \sqrt{\frac{2R}{a}} = R\sqrt{\frac{8\pi\varepsilon_0 m}{Q\lambda}}, \qquad V_1 = \sqrt{2aR} = \sqrt{\frac{Q\lambda}{2\pi\varepsilon_0 m}} = \sqrt{2}\,v_0.$$

Пункт 2. Скорость на расстоянии l.

1. Закон сохранения энергии во втором опыте от выхода из сферы до $r_A = l$ (силы потенциальны, других нет):

$$V_2^2 = V_1^2 + \frac{2(W_2(R) - W_2(l))}{m}.$$

2. Эту разность энергий даёт первый опыт. Работа силы на одном и том же отрезке $[R,\ l]$ в первом опыте вдвое больше (сила вдвое больше), а там стержень разогнался из покоя до u_0:

$$\frac{mu_0^2}{2} = W_1(R) - W_1(l) = 2(W_2(R) - W_2(l)).$$

3. Итог.

$$V_2^2 = V_1^2 + \frac{u_0^2}{2} = 2v_0^2 + v_0^2 = 3v_0^2, \qquad V_2 = \sqrt{\frac{3Q\lambda}{4\pi\varepsilon_0 m}}.$$

Пункт 3. Время до расстояния S.

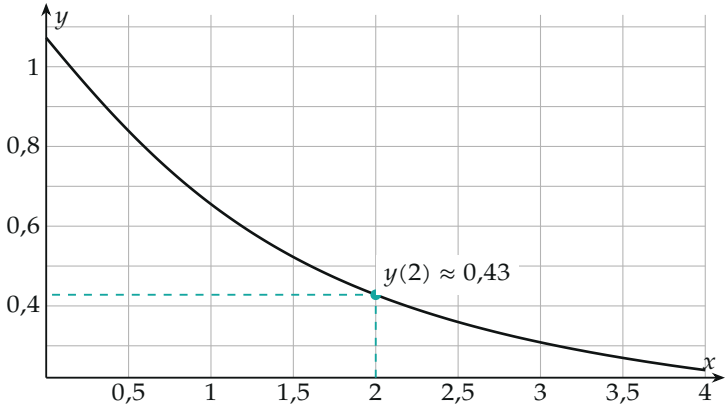
1. Подобие движений. Пусть в первом опыте стержень стартует с поверхности со скоростью $v = \sqrt{2}\,V_1$. Тогда в любой точке r

$$v_1^2(r) = v^2 + \frac{2(W_1(R) - W_1(r))}{m} = 2V_1^2 + \frac{4(W_2(R) - W_2(r))}{m} = 2V^2(r),$$

то есть скорость первого опыта всюду в $\sqrt{2}$ раз больше. Каждый малый участок dr во втором опыте проходится в $\sqrt{2}$ раз дольше: $dt = dr/V = \sqrt{2}\,dr/v_1$. Суммируя от R до S:

$$t = \sqrt{2}\,\tau(v = \sqrt{2}V_1) = \sqrt{2}\,\tau_0\,y(x), \qquad x = \frac{\sqrt{2}V_1}{v_0} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}v_0}{v_0} = 2.$$

2. По графику $y(2) \approx 0{,}43$.



Нужная точка графика первого опыта: $x = 2$, $y \approx 0{,}43$.

3. Полное время — внутри сферы и снаружи, $\sqrt{2}\tau_0 = R\sqrt{8\pi\varepsilon_0 m/(Q\lambda)}$:

$$T = T_1 + t = R(1 + y(2))\sqrt{\frac{8\pi\varepsilon_0 m}{Q\lambda}} \approx 7{,}17\,R\sqrt{\frac{\varepsilon_0 m}{Q\lambda}}.$$

Обратите внимание: подобие верно только снаружи сферы. Поэтому время делим на две части: внутри — равноускоренное движение, снаружи — пересчёт графика.

Проверка. Размерность: T и T_1 выражены через τ_0, а это время по условию; V_1, V_2 — через v_0. Предел: на отрезке $[R, l]$ квадрат скорости во втором опыте вырос на v_0^2, а в первом — на $u_0^2 = 2v_0^2$, вдвое больше, как и должно быть при вдвое большей силе. Второй способ для $y(2)$: в первом опыте $v^2 = x^2 v_0^2 + 4v_0^2 \ln(r/R)$, и $y(x) = \int_1^{S/R} d\rho/\sqrt{x^2 + 4\ln\rho}$; при $S = 2R$ этот интеграл (python) даёт $y(0) = 1{,}07$, $y(1) = 0{,}655$ — в точности график условия, значит, $S = 2R$, и $y(2) = 0{,}428$. Попутно $u_0^2 = 4v_0^2 \ln(l/R) = 2v_0^2$ даёт $l = R\sqrt{e}$.

Ответ. 1) $T_1 = R\sqrt{\dfrac{8\pi\varepsilon_0 m}{Q\lambda}}$, $V_1 = \sqrt{\dfrac{Q\lambda}{2\pi\varepsilon_0 m}}$; 2) $V_2 = \sqrt{\dfrac{3Q\lambda}{4\pi\varepsilon_0 m}}$;
3) $T = R(1 + y(2))\sqrt{\dfrac{8\pi\varepsilon_0 m}{Q\lambda}} \approx 7{,}17\,R\sqrt{\dfrac{\varepsilon_0 m}{Q\lambda}}$, $y(2) \approx 0{,}43$.